គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច

ភាគ២- វិសមភាព

វិសមភាពជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យា ដែលតែងចេញក្នុងការប្រលងសិស្សពូកែនានាដោយស្ទើរតែរាល់លើក។ សៀវភៅនេះ មានមេរៀនសង្ខេបខ្លះៗ ទ្រឹស្តីបទនិងលំហាត់អនុវត្តន៍ល្អៗ ១00លំហាត់ ដកស្រង់ចេញពីការប្រលងសិស្សពូកែនៅប្រទេសនានាលើពិភពលោក។

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ
អនុបណ្ឌិតឯកទេសសំនង់ស៊ីវិល។ សាស្ត្រាចារ្យសំនង់ស៊ីវិល, វិទ្យាស្ថានបច្ចេកវិទ្យាកម្ពុជា។
មេដាយមាសគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទុតិយភូមិ, កម្ពុជា ឆ្នាំ១៩៩៧។

គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច
ភាគ២- វិសមភាព

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច
ភាគ២- វិសមភាព

សំរាប់ត្រៀមប្រលងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ជាតិ និង អន្តរជាតិ

រក្សាសិទ្ធិ ២០០៨

១

សេចក្ដីផ្ដើម ទ្រឹស្ដីបទជាយៗ

១.១ វិសមភាពត្រីកោណ

ទ្រឹស្ដីបទ ១.១

ចំពោះគ្រប់ចំនុចទាំងអស់ក្នុងលំហ គេមាន $AB \leq AC + CB$ ដែលស្មើគ្នា ទាល់តែ និងមានតែ $C \in [AB]$។

លំហាត់ 1

តាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

ចំលើយ

<u>ដំនោះស្រាយទី១</u>

យើងមាន

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ = & \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} + \frac{2b}{(c+a)+(c+a)} + \frac{2c}{(a+b)+(a+b)} \end{aligned}$$

$$< \frac{2a}{a+(b+c)} + \frac{2b}{b+(c+a)} + \frac{2c}{c+(a+b)} = 2$$

<u>ដំណោះស្រាយទី២</u>

តាង $a = x+y, b = y+z, c = z+x$ ។

$$\begin{array}{lclcl} a+b>c & \Leftrightarrow & 2y>0 & \Rightarrow & y>0 \\ a+c>b & \Leftrightarrow & 2x>0 & \Rightarrow & x>0 \\ b+c>a & \Leftrightarrow & 2z>0 & \Rightarrow & z>0 \end{array}$$

ដូច្នេះ យើងបំលែង លក្ខខណ្ឌ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណមក $x, y, z > 0$ ។

យើងមាន

$$\frac{x+y}{x+y+z+z} + \frac{y+z}{x+y+z+x} + \frac{z+x}{z+y+z+y}$$

$$< \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} = 2 \text{ ពិត។}$$

ចំណាំ

បើជួបលក្ខខណ្ឌ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណ ចូរតាង

$$a = x+y, b = y+z, c = z+x$$

លំហាត់ 2

គេអោយ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$3\left(ab+bc+ca\right) \leq \left(a+b+c\right)^2 < 4\left(ab+bc+ca\right)$$

ចំលើយ

តាង $a = x+y, b = y+z, c = z+x$ នោះ $x, y, z > 0$ ។

វិសមភាពខាងឆ្វេងសមមូលនឹង

$$\begin{aligned} & \left(a+b+c\right)^2 \geq 3\left(ab+bc+ca\right) \\ \Leftrightarrow\quad & 4\left(x+y+z\right)^2 \geq \\ & 3\left[\left(x+y\right)\left(y+z\right)+\left(y+z\right)\left(z+x\right)+\left(z+x\right)\left(x+y\right)\right] \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\left[\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\right] \geq 0 \end{aligned}$$

ពិត។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $x = y = z$ មានន័យថា $a = b = c$ ។

ដូចគ្នាវិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង

$$xy+yz+zx > 0 \quad \text{ពិត ព្រោះ } x, y, z > 0$$

លំហាត់ 3

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$ និង ចំនួនពិត $a_1, a_2, ... a_n$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i<j} \left| a_i - a_j \right| \geq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n} \left| a_i \right|$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\left(-a_i\right) = \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} a_j$$

និង $$n\left|a_i\right| = \left|\left(n-1\right)a_i - \left(-a_i\right)\right| = \left|\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left(a_i - a_j\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{i \neq j} \left(a_i - a_j\right)\right| \leq \sum_{i \neq j} \left|a_i - a_j\right|$$

$\Rightarrow$ $$n\sum_{i=1}^{n} \left|a_i\right| \leq 2\sum_{i<j} \left|a_i - a_j\right| \quad \Rightarrow \text{ វិសមភាពពិត។}$$

ចំពោះ $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = x$ និង $a_n = -\left(n-1\right)x$ យើងទាញបានអង្គទាំង ២ស្មើគ្នា។

លំហាត់ 4

ក) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនុច O, A_1, A_2 នៃលំហ គេមាន

$$\left\|\overrightarrow{OA_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_2}\right\| \le \left\|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\right\|$$

ខ) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនុច O, A_1, A_2, A_3, A_4 នៃលំហ គេមាន

$$\sum_{i=1}^{4}\left\|\overrightarrow{OA_i}\right\| \le \sum_{1\le i<j\le 4}\left\|\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}\right\|$$

ចំលើយ

ក) យើងមាន

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{OA_1}\right\| &= \left\|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\right)\right\| \\ &\le \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\right\|\right)\end{aligned}$$

ដូចគ្នា $\quad \left\|\overrightarrow{OA_2}\right\| \le \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\right\|\right)$

ដូច្នេះ $\quad \left\|\overrightarrow{OA_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_2}\right\| \le \left\|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\right\|$

សំគាល់

វិសមភាព មានន័យថា ក្នុងប្រលេឡូក្រាមមួយ ផលបូករង្វាស់ជ្រុង២ជាប់គ្នា ធំមិនលើសពី ផលបូកនៃអង្កត់ទ្រូងទេ។

ខ) តាមវិសមភាពក) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\left\|\overrightarrow{OA_i}\right\| \le &\left\|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\right\| \\ &+\left\|\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_4}\right\|\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\left\|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right\|+\left\|\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{OA_4}\right\| \le \left\|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{OA_4}\right\|+$$
$$\left\|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}\right\|$$
$$\le \left\|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}\right\|+\left\|\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}\right\|+$$
$$\left\|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_4}\right\|+\left\|\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right\|$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{i=1}^{4}\left\|\overrightarrow{OA_i}\right\| \le \sum_{1\le i<j\le 4}\left\|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right\|$$

លំហាត់ 5

(អន្តរជាតិ ២000)

គេអោយ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$$

ចំលើយ

ជាដំបូងយើងសន្មតថា កត្តានិមួយៗនៃអង្គខាងស្តាំរបស់វិសមភាពមានតំលៃវិជ្ជមានវិស្សមាន។

យើងមាន $b-1+\frac{1}{c}=b\left(1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}\right)=b\left(1+a-\frac{1}{b}\right)$

$$\Rightarrow \quad \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=b\left(a^2-\left(a-\frac{1}{b}\right)^2\right)\le ba^2$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le cb^2$$
$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le ac^2$$
$$\Rightarrow \quad \left[\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right]^2\le\left(abc\right)^2=1 \quad \text{ពិត។}$$

ករណីមានកត្តាណាមួយអវិជ្ជមាន ឧទាហរណ៍ $a-1+\frac{1}{b}<0$ នោះ $a<1$ ហើយ $b>1$។ ក្នុងករណីនេះ $b-1+\frac{1}{c}>0$ និង $c-1+\frac{1}{a}>0$ ។ ដូច្នេះបើមានកត្តាណាមួយអវិជ្ជមាន នោះ មានតែកត្តាមួយនោះប៉ុណ្ណោះ ដែល អវិជ្ជមាន ដូច្នេះ ផលគុណនៃកត្តាទាំងបីនេះអវិជ្ជមាន ដូច្នេះតូចជាង១។
(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៥)

១.២ ចំនួនការេវិជ្ជមានជានិច្ច

ទ្រឹស្តីបទ ១.២.១

១) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b គេមាន $a^2+b^2\ge 2ab$ និង $4ab\le\left(a+b\right)^2$ វាស្មើគ្នា បើ $a=b$ និង ច្រាសមកវិញ។

២) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x>0,$ គេមាន $x+\frac{1}{x}\ge 2$។ វាស្មើគ្នា បើ $x=1$ និងច្រាសមកវិញ។

លំហាត់ 6

គេអោយ២ចំនួនពិត a, b មិនសូន្យ។ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតនៃ

$$\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^2}{a^2}$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}&\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^2}{a^2}\\ &\qquad=\left(\frac{a^6}{b^6}+\frac{b^6}{a^6}\right)+\left(\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)\geq 2+2+2\end{aligned}$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a=b$ ។

លំហាត់ 7

(រុស្ស៊ី ១៩៩៥)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, y > 0$

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}\leq\frac{1}{xy}$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}&\leq\frac{x}{2\sqrt{x^4y^2}}+\frac{y}{2\sqrt{x^2y^4}}\\ &\leq\frac{x}{2x^2y}+\frac{y}{2xy^2}=\frac{1}{xy}\end{aligned}$$

លំហាត់ 8

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y គេមាន

$$x^2+y^2+1>x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$0\le\left(x-\sqrt{y^2+1}\right)^2+\left(y-\sqrt{x^2+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad x^2+y^2+1\ge x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើ $\begin{cases} x=\sqrt{y^2+1}\\ y=\sqrt{x^2+1}\end{cases}$

$$\Rightarrow \qquad x^2+y^2=x^2+y^2+2$$

មិនអាច។ ដូច្នេះអង្គទី១ធំជាងអង្គទី២ដាច់ខាត។

លំហាត់ 9

គេអោយ $x, y, z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

ចំលើយ

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{y}\right)^2\ge 0 \text{ ពិតជានិច្ច។}$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា មានតែ$x=y=z$ ។

លំហាត់ 10

ចូរបង្ហាញថា បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ នោះគេមាន
$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\geq 8\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)$

ចំលើយ

តាង $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ នោះ $x,y,z>0$ ។

វិសមភាពសមមូលនឹង

$\left(x+2y+z\right)\left(x+y+2z\right)\left(2x+y+z\right)\geq 64xyz$

យើងមាន

$$\begin{aligned} x+2y+z &= \left(x+y\right)+\left(y+z\right) \\ &\geq 2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz} \\ &\geq 4\left(xy^2z\right)^{1/4} \end{aligned}$$

ដូចគ្នា $x+y+2z\geq 4\left(xyz^2\right)^{1/4}; 2x+y+z\geq 4\left(x^2yz\right)^{1/4}$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} &\left(x+2y+z\right)\left(x+y+2z\right)\left(2x+y+z\right) \\ &\geq 64\left(xy^2z.xyz^2.x^2yz\right)^{1/4}=64xyz \text{ ពិត។} \end{aligned}$$

លំហាត់ 11

គេអោយចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0$$

ចូរកំនត់ករណីសមភាព។

ចំលើយ

តាង $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ ។ ដូច្នេះ $a, b, c > 0$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \\
&\quad = \frac{(a - b)c}{b} + \frac{(b - c)a}{c} + \frac{(c - a)b}{a} \\
&\quad = \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} - a - b - c
\end{aligned}$$

តែថា $\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c}\right) = a\frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq a$ ទៅជាស្មើគ្នា ទាល់តែ $b = c$ ។ ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right) \geq c$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ba}{c} + \frac{bc}{a}\right) \geq b$$

បូកអង្គនៃវិសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} - a - b - c \geq 0$ ។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a = b = c$ មានន័យថា $x = y = z$ ។

លំហាត់ 12
(អូឡាំពិ្យាដអាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ១៩៩៦)

គេអោយ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

ចំលើយ

តាង $x=a+b-c, y=b+c-a, z=c+a-b$ ។

ដូច្នេះ $x, y, z>0$ និង $a=\dfrac{x+z}{2}, b=\dfrac{y+x}{2}, c=\dfrac{z+y}{2}$ ។ យើងមាន

$$2\left(x+y\right)\ge x+y+2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើ $x=y$ ។

ដូច្នេះ

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2}\sqrt{x+y}=2\sqrt{b}$$

ដូចគ្នា $\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{c}$

$$\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}\le 2\sqrt{a}$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាព យើងទាញបានវិសមភាពពិត។

សមភាពកើតមាន លុះត្រាតែ $x=y=z$ មានន័យថា $a=b=c$ ។

លំហាត់ 13

(អាមេរិច ១៩៩៧)

គេអោយ $a, b, c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}$$

ចំលើយ

យើងមាន $(a-b)\left(a^2-b^2\right) \ge 0 \Rightarrow a^3+b^3 \ge ab(a+b)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និងមានតែ $a=b$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \le \frac{1}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc} \le \frac{a}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}$$

$$\le \frac{c+b+a}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$$

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៥)

លំហាត់ 14

(លំហាត់ស្នើទៅសិស្សពូកែអន្តរជាតិ ១៩៩៦)

គេអោយ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned} a^5+b^5 &= \left(a+b\right)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)\\ &= \left(a+b\right)\left[\left(a-b\right)\left(a^3-b^3\right)+a^2b^2\right]\\ &\ge \left(a+b\right)a^2b^2 \text{ ព្រោះ } \left(a-b\right)\left(a^3-b^3\right)\ge 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{\left(a+b\right)a^2b^2+ab} = \frac{1}{ab\left(a+b\right)+1} = \frac{1}{ab\left(a+b+c\right)}=\frac{c}{a+b+c}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា ចំពោះតួផ្សេងទៀត។ យើងទាញបាន

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}$$

$$\le\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1$$

សមមភាពកើតមានពេល $a=b=c$។

ទ្រឹស្តីបទ ១.២.២ (វិសមភាព កូស៊ី ស្វ័ស៊ី)

គ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ គេមាន

$$\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n\right)^2$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើ វ៉ិចទ័រ $\left(a_1, \ldots, a_n\right)$ និង $\left(b_1, \ldots, b_n\right)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $$A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$$B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

ដូច្នេះ
$$\begin{aligned} A - B &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j b_i b_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2 a_i a_j b_i b_j\right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ សំនើពិត។

សំគាល់

វិសមភាពនេះអាចបកស្រាយតាមធរណីមាត្របាន។ យើងពិនិត្យក្នុងលំហអឺគ្លីដ។ បើ $\vec{u}(a_1, a_2, a_3)$ និង $\vec{v}(b_1, b_2, b_3)$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ នោះវិសមភាពកូស៊ី–ស្វ័សិ ដូចគ្នានឹង

$$\left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 \geq \left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 \cos^2\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)^2$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើសិនជា $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា។

ក្នុងគណិតវិទ្យា វិសមភាពកូស៊ី–ស្វ័សិ អ្នកខ្លះហៅថាវិសមភាពស្វ័សិ វិសមភាពកូស៊ី រឺក៏វិសមភាពកូស៊ី–ប៊ុនា្យកូវស្គី–ស្វ័សិ (គឺហៅតាមឈ្មោះ អូគុស្តាំង លួីសកូស៊ី(Augustin Louis Cauchy), វិចទ័រ យ៉ាកូលេវិច ប៊ុនា្យកូវស្គី (Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, គណិតវិទូរុស្ស៊ី,១៨០៤–១៨៨៩)និង ហ៊ែរម៉ាន អាម៉ានឌុស ស្វ័សិ(Hermann Amandus Schwarz, គណិតវិទូអាល្លឺម៉ង់,១៨៤៣–១៩២១))។

លំហាត់ 15

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ គេមាន

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ស៊

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\,\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 = n^2$$

លំហាត់ 16

(សហរដ្ឋអាមេរិច ១៩៧៨)

គេអោយចំនួនពិត a, b, c, d, e ដែល

$$a + b + c + d + e = 8 \qquad \textbf{និង}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

ចូរកំនត់តំលៃធំបំផុតរបស់ e។

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ស៍

$$\begin{aligned}\left(a + b + c + d\right)^2 &\le \left(1 + 1 + 1 + 1\right)\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\\ &= 4\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(8 - e\right)^2 \le 4\left(16 - e^2\right)$$

$$\Rightarrow \qquad e\left(5e - 16\right) \le 0$$

$$\Rightarrow \qquad 0 \le e \le \frac{16}{5}$$

ដើម្បីអោយ $e = \dfrac{16}{5}$ លក្ខខណ្ឌគឺ $a = b = c = d$ និង $a + b + c + d = \dfrac{24}{5}$

$\Rightarrow a = b = c = d = \dfrac{6}{5}$ ។

លំហាត់ 17

(អូស្ត្រាលី ១៩៨៣)

គេអោយចំនួនគត់ $n > 1$, **ចំនួនពិត** $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$ **និង**

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s - a_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s - a_i}{a_i} \geq n\left(n-1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{\left(n-1\right)}$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ស៊ យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s - a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s - a_i}{s}\right) \geq n^2$$

យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s - a_i}{s} = \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} a_i = n - 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s - a_i}\right) \geq \frac{n^2}{n-1} \qquad \text{ពិត}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត $$\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}=-n+\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ស៍

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s}\right)\ge n^2$$

ដោយ $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s}\right)=1 \Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right)\ge n^2$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}\ge -n+n^2 = n\left(n-1\right) \quad \text{ពិត}$$

យើងមាន $$\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\ge\frac{s^2}{n} \quad \text{។}$$

តែថា $$\left(\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\left(s-a_i\right)\right]\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=s^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right)\ge\frac{s^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\left(s-a_i\right)\right]\right)}=\frac{s^2}{s\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

$$\ge\frac{s^2}{s^2-\frac{s^2}{n}}=\frac{n}{n-1} \quad \text{ពិត។}$$

លំហាត់ 18

(ចិន ១៩៨៧ ១៩៨៨)

ក) គេអោយ $a_1, a_2, a_3 > 0$ ដែល

$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2 > 2\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4\right)$។ ចូរបង្ហាញថា a_1, a_2, a_3 ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

ខ) គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 3$ និង $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$ ដែល

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 > (n-1)\left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4\right)$$

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ i, j, k ខុសគ្នាពីរៗ ចំនួន a_i, a_j, a_k ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

ចំលើយ

ក) តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ ។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $a_1 + a_2 > a_3$ ទៅបានហើយ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} & \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2 > 2\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \left(a_1 + a_2 + a_3\right)\left(a_1 + a_2 - a_3\right)\left(-a_1 + a_2 + a_3\right) \times \\ & \times\left(a_1 - a_2 + a_3\right) > 0 \end{aligned}$$

កត្តានិមួយៗសុទ្ធតែវិជ្ជមាន លើកលែងតែ $\left(a_1 + a_2 - a_3\right)$ ដែលមិនទាន់ដឹង។ តែផលគុណរបស់កត្តាទាំងអស់វិជ្ជមាន ដូច្នេះ $\left(a_1 + a_2 - a_3\right)$ ត្រូវតែវិជ្ជមាន។

ខ)

ករណី $n = 3$ បានស្រាយបញ្ជាក់រួចក្នុងសំនួរក)។ យើងសន្មតថា $n \geq 4$ ។

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា a_1, a_2, a_3 ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ជាការគ្រប់គ្រាន់ហើយ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ស៊

$$\left(n-1\right)\left(a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4\right)<\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^2$$

$$=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\sum_{k=4}^{n}a_k^4\right)^2$$

$$\leq\left(n-1\right)\left(\frac{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2}{4}+\frac{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2}{4}+\sum_{k=4}^{n}a_k^4\right)$$

$\Leftrightarrow \quad 2\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)<\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2$ ហើយតាម សំនួរ ក) យើងទាញបានថាសំនើពិត។

លំហាត់ 19

គេអោយ $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$ ។ **តាង** $S_1=\sum_{i=1}^{n}a_i$ **និង** $S_2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ ។ **ចូរបង្ហាញថា**

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_2-a_k^2}{S_1-a_k}\geq S_1$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ស៊ ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$S_2-a_i^2\geq\frac{1}{n-1}\left(S_1-a_i\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_2 - a_i^2}{\left(S_1 - a_i\right)} \geq \frac{1}{n-1}\left(S_1 - a_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{S_2 - a_i^2}{S_1 - a_k} \geq \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(S_1 - a_k\right) = S_1$$

លំហាត់ 20

(សឹង្ហបូរី ២000)

គេអោយ $a,b,c,d > 0$ ដែល $a^2 + b^2 = \left(c^2 + d^2\right)^3$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \geq 1$$

ចំលើយ

តាង $E = \left\{\left(a,b,c,d\right) \in \mathbb{R} > 0 \;/\; a^2 + b^2 = \left(c^2 + d^2\right)^3\right\}$ និង f ជាអនុគមន៍

កំនត់លើ E ដោយ $f\left(a,b,c,d\right) = \dfrac{c^3}{a} + \dfrac{d^3}{b} - 1$ ។

យើងឃើញថា ចំពោះ $\forall\lambda \in \mathbb{R} > 0 : \left(a,b,c,d\right) \in E$ និង $f\left(a,b,c,d\right) \geq 0$

ទាល់តែនិងមានតែ $\left(\lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda c, \lambda d\right) \in E$ និង $f\left(\lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda c, \lambda d\right) \geq 0$ ។

ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $\left(a,b,c,d\right) \in E$ និង $a^2 + b^2 = 1$ ដោយមិនធ្វើអោយបាត់

ភាពទូទៅឡើយ។ ដូច្នេះ $c^2 + d^2 = 1$ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ស៑ នាំអោយ

$$\left(\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b}\right)\left(ac + bd\right) \geq \left(c^2 + d^2\right)^2 = 1$$

តែយើងមាន
$$ac + bd \le \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 + d^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \ge \frac{1}{ac+bd} \ge 1$$

លំហាត់ 21

គេអោយ $x, y, z > 1$ ដែល $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ក្ស
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$
$$\le \sqrt{x+y+z}\sqrt{\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}}$$

យើងមាន $\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$

ដូច្នេះ វិសមភាពពិត។

យើងមានសមភាព លុះត្រាតែ $\frac{x-1}{x^2} = \frac{y-1}{y^2} = \frac{z-1}{z^2}$ និង $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow$

$x = y = z = \frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ 22

(ឥណ្ឌា ២០០១)

គេអោយ $x, y, z > 0$ ដែល $xyz \geq xy + yz + zx$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$xyz \geq 3\left(x + y + z\right)$$

ចំលើយ

តាង $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$ ។ លក្ខខណ្ឌ $xyz \geq xy + yz + zx \iff$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$$

$\Rightarrow \quad a + b + c \leq 1$

វិសមភាព $xyz \geq 3\left(x + y + z\right) \iff ab + bc + ca \leq \dfrac{1}{3}$ ។

យើងមាន $\quad 1 \geq \left(a + b + c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\left(ab + bc + ca\right)$

ហើយតាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វ័ស៍ យើងមាន

$$ab + bc + ca \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2 + a^2}$$

មានន័យថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ។ ដូច្នេះ នាំអោយ

$1 \geq 3\left(ab + bc + ca\right)$ ពិត។

លំហាត់ 23

គេអោយ $a,b,c>0$ **ដែល** $a+b+c=abc$ **។ ចូរបង្ហាញថា**

$$\max\left(a,b,c\right)\geq\sqrt{3}$$

ចំលើយ

តាង $a=\tan x, b=\tan y, c=\tan z$ នោះ x,y,z ជាមុំនៃត្រីកោណស្រួច។ ដូច្នេះ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\max\left(\tan x,\tan y,\tan z\right)\geq\sqrt{3}$$

តែថា មានមុំមួយរបស់ត្រីកោណ ឧទាហរណ៍ x ដែលធំជាងរឺស្មើ $\frac{\pi}{3}$ (បើ តូចជាង $\frac{\pi}{3}$ ទាំងអស់គ្នា នោះ ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ មានតំលៃតូចជាង π)។ ដោយអនុគមន៍ $\tan$ កើនលើ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ នោះ $\tan x\geq\sqrt{3}$ ។

ចំណាំ

បើជួបលក្ខខណ្ឌ $a,b,c>0$ និង $a+b+c=abc$ ចូរតាង

$$a=\tan x, b=\tan y, c=\tan z$$

ដូច្នេះ x,y,z អាចចាត់ទុកជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណស្រួចបាន មានន័យថា $x,y,z\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ និង $x+y+z=\pi$ ។

លំហាត់ 24

(អន្តរជាតិ ១៩៩៩)

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$ ។

ក) ចូរកំនត់ចំនួនថេរ C តូចបំផុត ដែល ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$ គេមាន

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4$$

ខ) ចំពោះចំនួនថេរ C នេះ ចូរកំនត់ករណីសមភាព។

ចំលើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j\right)^2 \\
&\geq 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(2\sum_{i<j} x_i x_j\right) \text{ វិសមភាពកូស៊ី} \qquad (១) \\
&= 8\sum_{i<j}\left(x_i x_j \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \\
&\geq 8\sum_{i<j} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \qquad (២)
\end{aligned}$$

យើងមានសមភាព(២) ទាល់តែនិងមានតែ មានយ៉ាងហោចណាស់x_i ចំនួន $\left(n-2\right)$ ដែលស្មើសូន្យ។ ឧទាហរណ៍ $x_3 = \cdots = x_n = 0$ ។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ យើងមានសមភាព (១) ទាល់តែនិងមានតែ $2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$ មានន័យថា $x_1 = x_2$ ។

ដូច្នេះ $C = \frac{1}{8}$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ មានយ៉ាងហោចណាស់ x_i ចំនួន $(n-2)$ តួ ដែលស្មើសូន្យ ហើយតួពីរទៀតស្មើគ្នា។

លំហាត់ 25

(ចិន ១៩៨៤/១៩៨៥)

គេអោយ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + ... + a_n$$

ចំលើយ

ចំពោះគ្រប់ $i \in \{1, 2, ..., n\}$ យើងមាន $\frac{a_i^2}{a_{i+1}} + a_{i+1} \geq 2a_i$ ។

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \geq 2\sum_{i=1}^{n} a_i$$

ដោយយក $a_{n+1} = a_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

២

តំរៀប

២.១) វិសមភាពនៃតំរៀប

វិសមភាពនេះ ដូចនៅក្នុងការលក់ដូរដែរ គឺ គេរកបានប្រាក់ច្រើន បើគេលក់ភាគច្រើន នៃផលិតផលរបស់គេថ្លៃ ហើយបានប្រាក់តិចបើគេលក់ថោកៗ។

ទ្រឹស្តីបទ ២.១.១

គេអោយ $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត កើនពីរ។

ដូច្នេះ ក្នុងចំនោមចំលាស់ σ នៃ $\{1,2,\ldots,n\}$ ផលបូក $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ មានតំលៃធំបំផុត ពេល $\sigma(i) = i$ និង តូចបំផុតពេល $\sigma(i) = n - i$ ចំពោះគ្រប់ i ។ មានន័យថា S_σ មានតំលៃធំបំផុតពេល ស្វ៊ីតទាំង២រៀបតាមលំដាប់ដូចគ្នា ហើយ តូចបំផុតបើរៀបតាមលំដាប់ផ្ទុយគ្នា។

ស្រាយបញ្ជាក់

ដោយចំនួនចំលាស់មានចំនួនកំនត់ (ទាំងអស់មាន $n!$ របៀប) នោះ មានមួយបែបដែល S_σ មានតំលៃធំបំផុត (ដូចគ្នា តូចបំផុត)។ តាង $i < j$ ជាសន្ទស្សន៍២, σ ជាចំលាស់នៃ $\{1,2,\ldots,n\}$ ហើយសន្មតថា $\sigma(i) > \sigma(j)$។ ដូច្នេះ $b_{\sigma(j)} \le b_{\sigma(i)}$ ព្រោះស្វ៊ីត (b_k)

កើន។ តាង σ' ជាចំលាស់ដែលដូចគ្នានឹង σ តែខុសគ្នាត្រង់ i,j ដែល $\sigma'(j)=\sigma(i)$ និង $\sigma'(i)=\sigma(j)$ ។ ដូច្នេះ $S_{\sigma'}-S_{\sigma}=(a_j-a_i)\left(b_{\sigma(i)}-b_{\sigma(j)}\right)$ ។

– បើ $a_i<a_j$ និង $b_{\sigma(j)}<b_{\sigma(i)}$ នោះ $S_{\sigma'}>S_{\sigma}$ មានន័យថា S_{σ} មិនមែនធំបំផុតទេ

– បើ $a_i=a_j$ រឺ $b_{\sigma(j)}=b_{\sigma(i)}$ នោះ $S_{\sigma'}=S_{\sigma}$

ដូច្នេះ ជំនួស σ ដោយ σ' ផលបូកមិនថយចុះទេ រឺក៏អាចធំជាងមុន។
បើ $\sigma(1)\neq 1$ នោះ ចំពោះ $i=1$ និង j ដែល $\sigma(j)=1$ យើងមានចំលាស់ σ' មួយដែល $\sigma'(1)=1$ ដោយរក្សាតំលៃផលបូកនៅដដែល។ ដូចគ្នា ចំពោះ $i=2,3,...,n-1$ រហូតទទួលបាន $\sigma'(i)=i$ ដែលពេលនោះផលបូកមានតំលៃ ស្មើ S_{σ} រឺក៏ធំជាង S_{σ} ។ ដូច្នេះផលបូកមានតំលៃធំបំផុត ពេល $\sigma(i)=i$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីតូចបំផុត។

លំហាត់ 26

(អន្តរជាតិ ១៩៧៥)

គេអោយចំនួនពិត $x_1\geq x_2\geq ...\geq x_n$ និង $y_1\geq y_2\geq ...\geq y_n$ ។ តាង $(z_1,z_2,...,z_n)$ ជាចំលាស់នៃ $(y_1,y_2,...,y_n)$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$$

ចំលើយ

វិសមភាពសមមូលនឹង $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\leq\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

វិសមភាពក្រោយនេះពិត តាមវិសមភាពតំរៀប។

លំហាត់ 27

ចូរគណនា តំលៃតូចបំផុតរបស់ $f\left(x\right)=\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}+\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$ ចំពោះ $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ។

ចំលើយ

មាន $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ។ តាង $a_1=\sin^3 x; a_2=\cos^3 x$ និង $b_1=\dfrac{1}{\cos x}$; $b_2=\dfrac{1}{\sin x}$ ។ យើងឃើញថា បើ $a_1\le a_2$ នោះ $b_1\le b_2$ ហើយ បើ $a_1\ge a_2$ នោះ $b_1\ge b_2$ ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពតំរៀប

$$\begin{aligned} f\left(x\right)=a_1b_1+a_2b_2 &\ge a_1b_2+a_2b_1\\ &=\sin^3 x\frac{1}{\sin x}+\cos^3 x\frac{1}{\cos x}\\ &=\sin^2 x+\cos^2 x=1\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងដឹងថា $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1.0$ ដូច្នេះ តំលៃតូចបំផុតរបស់ f គឺស្មើ ១។

លំហាត់ 28

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b,c\ge 0$ គេមាន

$$a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a\ge 3abc$$

ចំលើយ

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a\ge b\ge c$ ។ ដូច្នេះ $a^2\ge b^2\ge c^2$ និង $ab\ge ac\ge bc$ ។

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2a + b^2b + c^2c \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

និង $$a^2b + b^2c + c^2a = \left(ab\right)a + \left(ac\right)c + \left(bc\right)b$$

$$\geq \left(ab\right)c + \left(ac\right)b + \left(bc\right)a = 3abc$$

លំហាត់ 29

(អន្តរជាតិ ១៩៧៨)

គេអោយ $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ មិនសូន្យ ហើយមានតួខុសគ្នា២ៗ។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេមាន

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ចំលើយ

គេអោយ$n \geq 1$ ។ តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ មានតំលៃតូចបំផុត ពេល $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ ។

នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌបែបនេះ ($a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$) ហើយ ដោយសារ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលខុសគ្នាពីរៗ នោះ យើងទាញបាន $a_i \geq i$ ចំពោះគ្រប់ i ។

ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

លំហាត់ 30

(ចិន ១៩៨៤/១៩៨៥)

គេអោយ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + ... + a_n$$

ចំលើយ

យើងរៀប a_i តាមលំដាប់មួយដែល $a_{k(1)} \leq a_{k(2)} \leq ... \leq a_{k(n)}$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a_{k(1)}} \geq \frac{1}{a_{k(2)}} \geq .... \geq \frac{1}{a_{k(n)}}$$

ដូច្នេះតាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} = a_1^2\left(\frac{1}{a_2}\right) + a_2^2\left(\frac{1}{a_3}\right) + ... + a_n^2\left(\frac{1}{a_1}\right)$$

$$\geq a_{k(1)}^2\left(\frac{1}{a_{k(1)}}\right) + a_{k(2)}^2\left(\frac{1}{a_{k(2)}}\right) + ... + a_{k(n)}^2\left(\frac{1}{a_{k(n)}}\right)$$

$$= a_1 + a_2 + ... + a_n$$

២.២) វិសមភាព ឆេប៊ីសិវ

ទ្រឹស្តីបទ ២.២.១

ចំពោះគ្រប់ស្វ៊ីតកើននៃចំនួនពិតពីរ តាងដោយ $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ គេមាន

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \le \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}$$

ផ្ទុយទៅវិញ បើ $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$ នោះ

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \ge \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}$$

សំរាយបញ្ជាក់

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n \ge a_1 b_2 + a_2 b_3 + .. + a_n b_1$$
$$\ldots$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n \ge a_1 b_n + a_2 b_1 + .. + a_n b_{n-1}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$n\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + .. + a_n b_n\right) \ge \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \ldots + b_n\right)$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីស្វ៊ីត (b_n) រៀបតាមលំដាប់ច្រាសមកវិញ។

Pafnuty Lvovich Chebyshev
គណិតវិទូរុស្ស៊ី,១៨២១–១៨៩៤

លំហាត់ 31
(វិសមភាពនៃសប៊ីត)

គេអោយ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

ចំលើយ

<u>វិធីទី១</u>

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a\geq b\geq c$ ។

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{b+c}$$

តាមវិសមភាព ឆេប៊ីសិវ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=a.\frac{1}{b+c}+b.\frac{1}{c+a}+c\frac{1}{a+b}$$

$$\geq \frac{1}{3}\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left[\left(b+c\right)+\left(a+c\right)+\left(a+b\right)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$
$$\geq \frac{1}{6}3\sqrt[3]{\left(b+c\right)\left(a+c\right)\left(a+b\right)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c}\frac{1}{a+c}\frac{1}{a+b}}$$
$$=\frac{3}{2} \quad \text{ពិត}$$

<u>វិធីទី២</u>

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$ ។ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$$

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=a.\frac{1}{b+c}+b.\frac{1}{c+a}+c\frac{1}{a+b}$$
$$\geq a\frac{1}{c+a}+b\frac{1}{a+b}+c\frac{1}{b+c}$$

និង $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq a\frac{1}{a+b}+b\frac{1}{b+c}+c\frac{1}{a+c}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq a\frac{1}{c+a}+b\frac{1}{a+b}+c\frac{1}{b+c}$$
$$+a\frac{1}{a+b}+b\frac{1}{b+c}+c\frac{1}{a+c}$$
$$=3$$

$\Rightarrow$ វិសមភាពពិត។

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៥)

លំហាត់ 32

គេអោយ $a, b, c, d \geq 0$ ដែល $ab + bc + cd + da = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

ចំលើយ

តាង $$S = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c}$$

$$x = b+c+d, y = c+d+a, z = d+a+b, t = a+b+c$$

ដោយផលបូក S មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a, b, c, d នោះ យើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c \geq d$ ។

$\Rightarrow$ $a^n \geq b^n \geq c^n \geq d^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}*$ និង $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \geq \frac{1}{t}$ ។

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da = 1 \text{ ។}$$

តាមវិសមភាពឆេប៊ីសិវ យើងមាន

$$S = a^3\frac{1}{x} + b^3\frac{1}{y} + c^3\frac{1}{z} + d^3\frac{1}{t}$$
$$\geq \frac{1}{4}\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)$$

និង $$\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right) \geq \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(a+b+c+d\right)$$

$$\geq \frac{1}{4}(1)(a+b+c+d) = \frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

យើងមាន $x+y+z+t=3\big(a+b+c+d\big)$

$$\Rightarrow \qquad S \geq \frac{1}{16}\big(a+b+c+d\big)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$

$$\geq \frac{1}{48}\big(x+y+z+t\big)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) \geq \frac{16}{48}=\frac{1}{3}$$

លំហាត់ 33

គេអោយ $a,b,c>0$ និង $n\in\mathbb{N}^*$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

ចំលើយ

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a\geq b\geq c$ ។ ដូច្នេះ $a^n\geq b^n\geq c^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ និង $\dfrac{1}{b+c}\geq\dfrac{1}{c+a}\geq\dfrac{1}{a+b}$ ។

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^n}{a+b}+\frac{b^n}{b+c}+\frac{c^n}{c+a}$$

និង
$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^n}{c+a}+\frac{b^n}{a+b}+\frac{c^n}{b+c}$$

បូកអង្គនិងអង្គ យើងទាញបាន

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a}\right)$$

តាមវិសមភាពឆេប៊ីសិវ

$$a^n + b^n \geq \frac{1}{2}\left(a^{n-1} + b^{n-1}\right)\left(a+b\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a^n + b^n}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(a^{n-1} + b^{n-1}\right)$$

ដូចគ្នា $$\frac{b^n + c^n}{b+c} \geq \frac{1}{2}\left(b^{n-1} + c^{n-1}\right)$$

$$\frac{c^n + a^n}{c+a} \geq \frac{1}{2}\left(c^{n-1} + a^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}$$

លំហាត់ 34

គេអោយ $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} ... x_n^{x_n} \geq \left(x_1 x_2 ... x_n\right)^{\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}}$$

ចំលើយ

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា ស្វ៊ីត $\left(x_i\right)$ ជាស្វ៊ីតកើន។ ដូច្នេះ ស្វ៊ីត $\left(\ln x_i\right)$ ក៏ជាស្វ៊ីតកើនដែរ។ តាមវិសមភាពឆេប៊ីសិវ យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

លំហាត់ 35

គេអោយ $x, y, z > 0$ ដែល $xyz = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

ចំលើយ

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x \leq y \leq z$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{(1+y)(1+z)} \leq \frac{1}{(1+z)(1+x)} \leq \frac{1}{(1+x)(1+y)}$$

តាមវិសមភាពឆេប៊ីសិវ យើងទាញបាន

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq$$

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\left[\frac{1}{(1+y)(1+z)} + \frac{1}{(1+z)(1+x)} + \frac{1}{(1+x)(1+y)}\right]$$

$$= \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \frac{3 + x + y + z}{(1+y)(1+z)(1+x)}$$

តាង $\dfrac{x+y+z}{3} = a$ ។ តាមវិសមភាពរវាងតំលៃមធ្យម យើងមាន

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = a^3$$

$$3a = x + y + z \geq 3(xyz)^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\left(1+y\right)\left(1+z\right)\left(1+x\right) \le \left[\frac{\left(1+x\right)+\left(1+y\right)+\left(1+z\right)}{3}\right]^3$$
$$= \left(1+a\right)^3$$

ដូច្នេះ

$$\frac{x^3}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)} + \frac{y^3}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)} + \frac{z^3}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)} \ge a^3 \frac{6}{\left(1+a\right)^3}$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា $a^3 \dfrac{6}{\left(1+a\right)^3} \ge \dfrac{3}{4}$

ដោយ $a \ge 1$ នោះ $f\left(a\right) = 6\left(1 - \dfrac{1}{1+a}\right)^3 = \dfrac{6a^3}{\left(1+a\right)^3}$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត

លើសំណុំ $\mathbb{R}+$ ។ យើងមាន $f\left(a\right) \ge f\left(1\right) = \dfrac{3}{4}$ ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

៣

មធ្យម

ទ្រឹស្តីបទ៣.១ មធ្យមនព្វន្ត-ធរណីមាត្រ(កូស៊ី)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1, x_2, ..., x_n$ រឺសូន្យ គេមាន

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

ដោយសមភាពកើតមាន ទាល់តែ និងមានតែ $a_1 = a_2 = ... = a_n$ តែប៉ុណ្ណោះ។

សំរាយបញ្ជាក់

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត មិនអវិជ្ជមាន គេមាន

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពខាងលើពិត ចំពោះ $n = 2$ ។ សន្មតថា វិសមភាពខាងលើពិត រហូតដល់ $n = 2^{k-1}, k > 2$ ។ ដូច្នេះ

$$\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 ... a_{2^{k-1}}} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

តាង $$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

$$x_2 = \frac{a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}}{2^{k-1}}$$

យើងមាន $$\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{a_1+a_2+...+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}+\dfrac{a_{2^{k-1}+1}+...+a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2}$$
$$\geq \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right)\left(\frac{a_{2^{k-1}+1}+...+a_{2^k}}{2^{k-1}}\right)}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a_1+a_2+...+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1a_2...a_{2^k}}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពពិតចំពោះ គ្រប់ $n=2^k, k\geq 1$ ។ ឥឡូវសន្មតថា $2^{k-1}<n<2^k$ ។

តាង $\quad y_1=a_1, y_2=a_2, ..., y_n=a_n$

$$y_{n+1}=y_{n+2}=...=y_{2^k}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$
$$A=\frac{a_1+...+a_n}{n}$$
$$G=\sqrt[n]{a_1...a_n}$$

យើងមាន

$$\frac{y_1+...+y_{2^k}}{2^k}\geq \sqrt[2^k]{y_1...y_{2^k}}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a_1+a_2+...+a_n+\left(2^k-n\right)\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}}{2^k}$$
$$\geq \sqrt[2^k]{a_1...a_n\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^{2^k-n}}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{nA+\left(2^k-n\right)A}{2^k}\geq \sqrt[2^k]{G^nA^{2^k-n}}$$
$$\Rightarrow \quad A\geq G^{n/2^k}A^{1-n/2^k}$$
$$\Rightarrow \quad A^{n/2^k}\geq G^{n/2^k}$$
$$\Rightarrow \quad A\geq G$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

លំហាត់ 36

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, .., x_n > 0$ គេមាន

$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$ និង

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{\frac{1}{n}} = n\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$$

លំហាត់ 37

(ម៉ូស្គូ ២000)

គេអោយ $x, y, z \in \mathbb{R} + *$ ដែល $xyz = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2\left(xy + yz + zx\right)$$

ចំលើយ

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x \leq y \leq z$ ។

តាង $f\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2\left(xy + yz + zx\right)$

យើងមាន

$$\begin{aligned} & f\left(x,y,z\right) - f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) \\ & = y^2 + z^2 + y + z - 2\left(xy + yz + zx\right) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz} \\ & = \left(y - z\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 - 2x\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \\ & = \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \left[\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 + 1 - 2x\right] \\ & = \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \left(y + z - 2x + 1 + 2\sqrt{yz}\right) \end{aligned}$$

ដោយ $x \leq y \leq z$ នោះ $y + z - 2x \geq 0$ ។

$\Rightarrow \quad f\left(x,y,z\right) - f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) \geq 0$ ហើយអង្គទាំង២ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $y = z$ ។

តាង $a = x$ និង $b = \sqrt{yz}$ ។ ដូច្នេះ $a,b > 0$ និង $ab^2 = 1$ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned} f\left(a,b,b\right) &= a^2 + a + 2b - 4ab \\ &= \frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2} + 2b - \frac{4}{b} \\ &= \frac{1}{b^4}\left(2b^5 - 4b^3 + b^2 + 1\right) \\ &= \frac{1}{b^4}\left(b - 1\right)^2 \left(2b^3 + 4b^2 + 2b + 1\right) \\ &\geq 0 \quad \text{ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ } b = 1 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f\left(x,y,z\right) \geq f\left(a,b,b\right) \geq 0$ ហើយស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $y = z, b = 1, xyz = 1$

$\Rightarrow\ x = y = z = 1$ ។

លំហាត់ 38

(សូវៀត ១៩៦២)

គេអោយ $a,b,c,d > 0$ **ដែល** $abcd = 1$ **។ ចូរបង្ហាញថា**

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$\geq 10\left(a^2b^2c^2d^2ab.ac.ad.bc.bd.cd\right)^{\frac{1}{10}} = 10\left(a^5b^5c^5d^5\right)^{\frac{1}{10}} = 10$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ពេល $a = b = c = d = 1$ ។

លំហាត់ 39

គេអោយ $a,b,c \geq 0$ **។ ចូរបង្ហាញថា**

$$\left(a+b+c\right)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\left(a+b+c\right)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc$$
$$+3\left(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b\right)$$

$$\geq a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3 \times 6\left(a^6 b^6 c^6\right)^{1/6}$$

(តាមវិសមភាពកូស៊ី)

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

លំហាត់ 40

គេអោយ $a,b,c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$abc \geq \left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)$

ចំលើយ

បើអង្គខាងស្តាំនៃវិសមភាព អវិជ្ជមាន រឺ សូន្យ នោះវិសមភាពជាវិសមភាពដាច់ខាត។ ក្រៅពីនេះ យើងសន្មតថា $a = \max\left(a,b,c\right)$ ។ ដូច្នេះ $a+b-c$ និង $c+a-b$ វិជ្ជមានដាច់ខាត។ ដូច្នេះកត្តាទីបីក៏វិជ្ជមានដែរ។ ដូច្នេះ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ។ ដូច្នេះយើងតាង

$$a+b-c = x, b+c-a = y, c+a-b = z$$

មានន័យថា $x,y,z > 0$ ហើយ $a = \dfrac{x+z}{2}, b = \dfrac{y+x}{2}, c = \dfrac{z+y}{2}$ ។

វិសមភាពទៅជា

$$\left(x+z\right)\left(y+x\right)\left(z+y\right) \geq 8xyz$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$\left(x+z\right)\left(y+x\right)\left(z+y\right) \geq 2\sqrt{xz}.2\sqrt{yx}.2\sqrt{zy} = 8xyz$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាទាល់តែនិងមានតែ $x = y = z$ មានន័យថា $a = b = c$ ។

លំហាត់ 41

គេអោយ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}+*$ ដែល $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{k=1}^{n} a_k\left(1-a_k\right) \leq \frac{\left(n-1\right)^n}{n^{2n}}$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} a_k\left(1-a_k\right) &= \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-a_k\right)\right)\\ &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-a_k\right)\right)^n\\ &\leq \frac{\left(n-1\right)^n}{n^{2n}}\end{aligned}$$

លំហាត់ 42

(អូទ្រីស ២000)

គេអោយចំនួនពិត a, b ដែល $a \neq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a} &= \left(b+\frac{1}{2a}\right)^2+a^2+\frac{3}{4a^2}\\
&\geq a^2+\frac{3}{4a^2} \quad \text{ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ } b=-\frac{1}{2a}\\
&\geq 2\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad \text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\geq\sqrt{3}
$$

ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a^4=\frac{3}{4}$ និង $b=-\frac{1}{2a}$ ។

លំហាត់ 43

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$ តាង $U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ និង $V_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា ស៊ីុត (U_n) ជាស៊ីុតកើន ហើយស៊ីុត (V_n) ជាស៊ីុតចុះ។

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះ $n\geq 2$

$$
\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{(n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+1}{n}=1+\frac{1}{n}
$$

$$
\Rightarrow \qquad U_{n-1}<U_n
$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V_{n-1}} < \frac{1}{V_n}$$

$$\Rightarrow \quad V_n < V_{n-1}$$

លំហាត់ 44

(សូវៀត ១៩៦៩)

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 3$ និង $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}+*$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} > \frac{n}{4}$$

ចំលើយ

យើងតាង

$$f\left(a_1, a_2, ..., a_n\right) = \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2}$$

ក្នុងសំនេរបន្ទាប់មកទៀតនេះ ចំពោះសន្ទស្សន៍ណាដែលធំជាង n មានន័យថាវាស្មើនឹងតំលៃនោះដក n ចេញ។

យើងសន្មតថា $a_1 = \max\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ ។ ដូច្នេះយក $i_1 = 1$ ។ តាង i_2 ជាសន្ទស្សន៍តាងអោយចំនួនធំបំផុតរវាង a_2 និង a_3 ហើយបើ $a_2 = a_3$ នោះយើងយក $i_2 = 2$ ។ ដូច្នេះ $i_2 \leq i_1 + 2$ ។

យើងបង្កើតស្វ៊ីត $\left(i_k\right)$ មួយ ដោយកំនើនដូចតទៅនេះ

បើ គេបង្កើតបាន i_k រួចហើយ គេតាង i_{k+1} ជាសន្ទស្សន៍នៃចំនួនធំជាងគេរវាង a_{i_k+1} និង a_{i_k+2} ដោយ បើ $a_{i_k+1}=a_{i_k+2}$ យក $i_{k+1}=i_k+1$ ។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ $i_{k+1}\le i_k+2$ ។

ដោយ $i_1=1$ នោះ $i_{k+1}\le 1+2k$ ចំពោះគ្រប់ k ។

ដោយ $a_1=a_{n+1}=\max\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$ នោះ យើងមាន r ដែល $i_{r+1}=n+1$ ។ ដូច្នេះ $i_r=n-1$ រឺ $i_r=n$ ។ ដូច្នេះ

$n-1\le i_r\le 1+2\left(r-1\right)$ ។

$$\Rightarrow \qquad r\ge \frac{n}{2} \qquad (១)$$

ដូច្នេះយើងទាញបាន

$$f\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right) \ge \frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\cdots+\frac{a_{i_r}}{2a_{i_{r+1}}} \qquad (២)$$

$$\ge \frac{r}{2}\left(\frac{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_r}}{a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{r+1}}}\right)^{\frac{1}{r}} \qquad \text{(វិសមភាពកូស៊ី)}$$

$$=\frac{r}{2}\ge\frac{n}{4}$$

ដើម្បីអោយ $f\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\frac{n}{4}$ គេត្រូវតែមាន (១) និង (២) ជាសមភាព។ តែសមភាព (២) នាំអោយ $r=n$ តែសមភាពនេះ មិនត្រូវគ្នានឹងសមភាព (១)។ ដូច្នេះ

$$f\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)>\frac{n}{4}$$

លំហាត់ 45

(ចិន ១៩៨៩/១៩៩០)

គេអោយ $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ ដែល $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{i=1}^{n}\left(2+a_i\right) \geq 3^n$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$2+a_i = 1+1+a_i \geq 3\left(a_i\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n}\left(2+a_i\right) \geq 3^n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{3}} = 3^n$$

លំហាត់ 46

គេអោយ $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} > 0$ ដែល $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{1+x_i} = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i \geq n^{n+1}$$

ចំលើយ

ចំពោះគ្រប់ i តាង $a_i = \dfrac{1}{1+x_i}$ ។ ដូច្នេះ $0 < a_i < 1, x_i = \dfrac{1-a_i}{a_i}$ និង

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$ ។

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}\left(1-a_i\right)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$1 - a_i = \sum_{k\neq i} a_k \geq n\left(\prod_{k\neq i} a_k\right)^{1/n}$$ ដោយអង្គទាំងពីស្មើគ្នាបើ a_k ស្មើគ្នា

ទាំងអស់។ ដូច្នេះ

$$\prod_{i=1}^{n+1}\left(1-a_i\right) \geq n^{n+1}\left(\prod_{k\neq 1} a_k\right)^{1/n}\cdots\left(\prod_{k\neq n+1} a_k\right)^{1/n}$$

$$= n^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i^n\right)^{1/n} = n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1} a_i$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}\left(1-a_i\right)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \geq n^{n+1}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើនិងមានតែ $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = n$ ។

លំហាត់ 47

គេអោយចំនួនគត់ $n > 1,\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}+*$ និង $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}+$ ។ តាង $s = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ។ ចូរកំនត់ចំនួនថេរធំបំផុត

$$C(n) \text{ ដែល } \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k\left(s - x_k\right)}{x_k} \geq C(n)\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \text{ ។}$$

ចំលើយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k, j តាង $\alpha_{k,j} = \dfrac{x_{j+k}}{x_j}$ ដែលក្នុងបណ្តាសន្ទស្សន៍ទាំងអស់នេះ បើសន្ទស្សន៍ណាមួយ ធំជាង n យើងជំនួសវាដោយ តំលៃសមមូលតាម n ។ ឧទាហរណ៍ $\left(1+n\right)$ ជំនួសដោយ 1;$(1 + n \equiv 1 \bmod n)$ $\left(2+n\right)$ ជំនួសដោយ 2 ។ល។

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ k យើងមាន

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} = 1 = \alpha_{k,1}\alpha_{k,2}...\alpha_{k,n} = \frac{x_{1+k}}{x_1}\frac{x_{2+k}}{x_2}....\frac{x_{n+k}}{x_n} \text{ ។}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j\left(s-x_j\right)}{x_j} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - x_j\right)}{x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(a_j\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_j}-1\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(a_j\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{k,j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1} a_j\alpha_{k,j} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-1} n\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= n\left(n-1\right)\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

សមភាពកើតមាន ពេល $x_1 = x_2 = ... = x_n$ ។ ដូច្នេះ $C\left(n\right) = n\left(n-1\right)$ ។

លំហាត់ 48

តើគេត្រូវចែកប៊ូលចំនួន n ទៅក្នុង ប្រអប់ចំនួនk យ៉ាងម៉េច ដើម្បីអោយ ផលបូកនៃចំនួនបន្សំប៊ូលពីរៗក្នុងប្រអប់និមួយៗ បូកចូលគ្នានឹងប្រអប់ទាំងអស់ផ្សេងទៀត មានចំនួនតិចបំផុត?។

ចំលើយ

ឧបមាថា $n_1, n_2, ..., n_k$ ជាចំនួនប៊ូលក្នុងប្រអប់ $1, 2, ..., k$ ។ យើងមាន $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ ។ ចំនួនបន្សំគូប៊ូលក្នុងប្រអប់ i មានតំលៃ $\binom{n_i}{2}$ ។ ដូច្នេះ ជាសរុបស្មើនឹង $\sum_{i=1}^{k}\binom{n_i}{2}$ ដែលយើងចង់អោយវាតិចបំផុត។

បើ មាន i, j ដែល $n_i - n_j \geq 2$ នោះ ដោយដកប៊ូលមួយចេញពីប្រអប់លេខ i ហើយយកទៅដាក់ក្នុងប្រអប់លេខ j យើងទាញបាន ចំនួនគូប៊ូលថយចុះ

$$\binom{n_i}{2} + \binom{n_j}{2} - \binom{n_i - 1}{2} - \binom{n_j + 1}{2} = n_i - n_j - 1 > 0$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងបន្ថយចំនួនគូប៊ូល ដោយធ្វើយ៉ាងណាអោយចំនួនប៊ូលក្នុងប្រអប់ពីរផ្សេងគ្នា មានចំនួនប៊ូលច្រើនជាងគ្នាមិនលើសពីមួយទេ។ ដូច្នេះ ប្រអប់និមួយមានប៊ូលចំនួន $\left[\frac{n}{k}\right]$ រឺ $\left[\frac{n}{k}\right] + 1$ ប៊ូល។

លំហាត់ 49

គេអោយ $x, y, z > 0$ ដែល $x + y + z = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64$$

ចំលើយ

តាង $P = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$

$$q = \frac{1}{\left(xyz\right)^{1/3}}$$

$$\Rightarrow \quad P = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3q$

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx} \geq 3q^2$$

$$q \geq \frac{3}{x+y+z} = 3$$

$$\frac{1}{xyz} = q^3$$

$$\Rightarrow \quad P \geq 1+3q+3q^2+q^3 = \left(1+q\right)^3 \geq \left(1+3\right)^3 = 64$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ពេល $x = y = z = \frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ 50

(រូម៉ានី ១៩៩៧)

គេអោយ ចំនួនគត់ $n \geq 2$ និង $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ដែល $x_1 x_2 ... x_n = 1$ ។ ចូរគណនាតំលៃតូចបំផុតរបស់

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_i^3 + x_j^6}$$

ចំលើយ

សំនើ

ចំពោះគ្រប់ $a, b > 0$ គេមាន $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \dfrac{1}{3}$ ហើយអង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $a = b$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \qquad 3\left(a^2 - ab + b^2\right) \geq a^2 + ab + b^2$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$ ពិត។ អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ$a = b$ ។

តាង $$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}$$ និង

$a_i = x_i^3$ ចំពោះគ្រប់ i ។

យើងមាន $a_1 a_2 ... a_n = 1$ ហើយតាមសំនើខាងលើ

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{x_i^3 + x_j^3}{a_i^2 + a_i a_j + a_j^2}
&= \sum_{1\le i<j\le n} \left[\left(a_i + a_j\right)\frac{a_i^2 - a_i a_j + a_j^2}{a_i^2 + a_i a_j + a_j^2}\right] \\
&\ge \frac{1}{3}\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i + a_j\right) \\
&= \frac{n-1}{3}\sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\ge \frac{n\left(n-1\right)}{3}\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{n\left(n-1\right)}{3}
\end{aligned}
$$

$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \ge \dfrac{n\left(n-1\right)}{3}$ អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ ។

លំហាត់ 51

គេអោយ $a,b,c,d \geq 0$ ដែល $a+b+c+d=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$$

ចំលើយ

តាង $f\left(a,b,c,d\right)=abc+bcd+cda+dab-\frac{176}{27}abcd$

$$=bc\left(a+d\right)+ad\left(b+c-\frac{176}{27}bc\right)$$

$f\left(a,b,c,d\right)$ ជាទំនាក់ទំនងឆ្លុះ (បើគេប្តូរគ្នា រវាង a,b,c,d នោះ f នៅដដែល)។

១) ករណី $b+c-\frac{176}{27}bc \leq 0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $f\left(a,b,c,d\right) \leq bc\left(a+d\right) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ $\Rightarrow$ វិសមភាពពិត។

២) ករណី $b+c-\frac{176}{27}bc>0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$f\left(a,b,c,d\right) \leq bc\left(a+d\right)+\left(\frac{a+d}{2}\right)^2\left(b+c-\frac{176}{27}bc\right)$$

$$=f\left(\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}\right)$$

ដូច្នេះ $$f\left(a,b,c,d\right) \leq f\left(\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}\right)$$

$$= f\left(b, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, c\right) \qquad \text{ព្រោះ } f \text{ ជា}$$

អនុគមន៍ស៊ីមេទ្រី

$$\leq f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$

$$\leq f\left(\frac{1}{4}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$= f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{a+d}{2}\right)$$

$$\leq f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27} \qquad \Rightarrow \text{វិសមភាពពិត។}$$

លំហាត់ 52

គេអោយពហុធាដឺក្រេទី $n \geq 1$ មានមេគុណវិជ្ជមាន និង $x_1, x_2, .., x_n \in \mathbb{R}+*$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left[P\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right]^2 + \left[P\left(\frac{x_3}{x_2}\right)\right]^2 + ... + \left[P\left(\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^n \geq n\left[P\left(1\right)\right]^2$$

ចំលើយ

តាង $P\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ ដោយ $a_i \geq 0$ ចំពោះ $i < n$ និង $a_n > 0$ ។ យើងមាន $x_1, x_2, .., x_n > 0$ ។

តាង $x_{n+1} = x_1$ ។

បើ $n = 1$ អង្គទាំង២នៃវិសមភាព ស្មើគ្នា។

បើ $n \geq 2$ យើងមាន $P^2\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 X^{2i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j X^{i+j}$ ។

ចំពោះ $p \in \mathbb{N}^*$ តាង $S_p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p$ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី $S_p \geq \left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

តែថា

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^2\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 S_{2i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j S_{i+j}$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j = P^2\left(1\right)$$

$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} P^2\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) \geq nP^2\left(1\right)$ ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $x_1 = x_2 = ... = x_n$ ។

លំហាត់ 53

គេអោយ $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}+*$ ដែល $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{n^{n-3}} \frac{1}{a_1 a_2 ... a_n} \geq n^2 \left(n-1\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

ចំលើយ

តាង $E = \left\{\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) \in \mathbb{R}^{n+*} \,/\, a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1\right\}$ និង f ជាអនុគមន៍មួយ កំនត់លើ E ដោយ

$$f\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) = n^2\left(n-1\right)\prod_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} P_k\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$$

ដែល $P_k\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right) = \dfrac{1}{a_k}\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ ។

បើ សិនជាគ្រប់ a_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ នោះគេមានពីរក្នុងចំនោមនោះ ឧទាហរណ៍ a_1, a_2 ដែល $a_1 < m < a_2$ ដែល $m = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \dfrac{1}{n}$ ។

យើងមាន

$$f\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right) = \left(a_1 + a_2\right)A + a_1 a_2 B$$

ដែល $A = \displaystyle\prod_{i=3}^{n} a_i$ និង $B = n^2\left(n-1\right)\displaystyle\prod_{i=3}^{n} a_i + \sum_{i=3}^{n} \frac{P_i\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)}{a_1 a_2}$

(បើ $n = 2$ យើងតាង $A = 1; B = n^2\left(n-1\right)$)។ យើងទាញបាន

$$f\left(m, a_1 + a_2 - m, \cdots, a_n\right) - f\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$$
$$= B\left(m\left(a_1 + a_2 - m\right) - a_1 a_2\right)$$

$$= B\left(m - a_1\right)\left(a_2 - m\right) > 0$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$f\left(m, a_1 + a_2 - m, \cdots, a_n\right) < f\left(m, m, \cdots, a_n\right) < \cdots < f\left(m, m, \cdots, m\right)$ ។

ដូច្នេះ $f\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right) \leq f\left(m, m, \cdots, m\right)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = m$ ។

តែ $m = \dfrac{1}{n}$

$$\Rightarrow \qquad f\left(m, m, \cdots, m\right) = \frac{n^2\left(n-1\right)}{n^n} + n.\frac{1}{n^{n-1}} = \frac{n^3}{n^n} \text{ ។}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{n^{n-3}}.\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq n^2\left(n-1\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $\qquad a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$ ។

លំហាត់ 54

គេអោយ៤ចំនុច A, B, C, D ស្ថិតនៅលើស្វែរមួយ មានកាំរង្វាស់ ១ ដែល

$$AB.AC.AD.BC.BD.CD = \frac{2^9}{3^3}$$

ចូរបង្ហាញថា ចតុមុខ $ABCD$ ជាចតុមុខនិយ័ត។

ចំលើយ

តាង S ជាស្វែរ មានផ្ចិត O និង កាំ $R = 1$។ តាង A_1, A_2, A_3, A_4 ជាបណ្តាចំនុចស្ថិតលើ S។ យើងមាន

$$\left(\prod_{i<j} A_iA_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{6}} \le \frac{1}{6}\sum_{i<j} A_iA_j^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \prod_{i<j} A_iA_j \le \frac{1}{6^3}\left(\sum_{i<j} A_iA_j^{\,2}\right)^3$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល A_iA_j មានតំលៃថេរ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} A_iA_j^{\,2} &= \sum_{i<j}\left(OA_i^{\,2} + OA_j^{\,2} - 2\overrightarrow{OA_i}\bullet\overrightarrow{OA_j}\right)\\
&= 12R^2 - 2\sum_{i<j}\overrightarrow{OA_i}\bullet\overrightarrow{OA_j}
\end{aligned}$$

ហើយ

$$\left\|\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\right)\bullet\left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{4} OA_i^{\,2} + 2\sum_{i<j} \overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j}$$
$$= 4R^2 + 2\sum_{i<j} \overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j}$$

$\Rightarrow \quad -2\sum_{i<j} \overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j} \quad = 4R^2 - \left\| \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i} \right\|^2 \leq 4R^2$ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA} = \vec{0}$ មានន័យថា O ជាអ៊ីសូបារីសង់របស់ A_i ។ ដូច្នេះ

$$\sum_{i<j} A_iA_j^{\,2} \leq 16R^2$$

$\Rightarrow \quad \prod_{i<j} A_iA_j \leq \frac{1}{6^3}\left(16R^2\right)^3 = \frac{2^9}{3^3}R^6$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល O ជាអ៊ីសូបារីសង់របស់ A_i ហើយ បណ្តាចំងាយ A_iA_j ស្មើគ្នាទាំងអស់ បើ $i \neq j$ ។ លក្ខខណ្ឌចុងក្រោយនេះ មានន័យថា $A_1A_2A_3A_4$ ជាចតុមុខនិយ័ត ដូច្នេះនាំអោយO ជាអ៊ីសូបារីសង់របស់ A_i ។ ដូច្នេះ

$$\prod_{i<j} A_iA_j \leq \frac{2^9}{3^3}R^6$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ករណី $A_1A_2A_3A_4$ ជាចតុមុខនិយ័ត។

លំហាត់ 55

គេអោយ $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}+^*$ ដែល $a_1 + a_2 + ... + a_n < 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1 a_2 ....a_n\left(1 - a_1 - a_2 - ... - a_n\right)}{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)\left(1 - a_1\right)\left(1 - a_2\right)...\left(1 - a_n\right)} \le \frac{1}{n^{n+1}}$$

ចំលើយ

តាង $a_0 = 1 - \left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)$ ។ យើងមាន

$$a_0 > 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 1$$

$$\frac{a_1 a_2 ....a_n\left(1 - a_1 - a_2 - ... - a_n\right)}{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)\left(1 - a_1\right)\left(1 - a_2\right)...\left(1 - a_n\right)} = \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n}\left(1 - a_k\right)}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងមាន

$$1 - a_i = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - a_i = \sum_{k \ne i} a_k \ge n\left(\prod_{k \ne i} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{k=0}^{n}\left(1 - a_k\right) \ge n^{n+1}\left(\prod_{k \ne 0} a_k\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{k \ne 1} a_k\right)^{\frac{1}{n}}...\left(\prod_{k \ne n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= n^{n+1}\prod_{k=0}^{n} a_k$$ ព្រោះ a_i និមួយៗមាន n ដង។

$$\Rightarrow \quad \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n}\left(1-a_k\right)} \le \frac{1}{n^{n+1}} \qquad \text{ពិត។}$$

សមភាពកើតមាន ពេល $a_0 = a_1 = ... = a_n = \dfrac{1}{n+1}$ ។

លំហាត់ 56

(អន្តរជាតិ ១៩៩៥)

តាង a,b,c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3\left(b+c\right)} + \frac{1}{b^3\left(c+a\right)} + \frac{1}{c^3\left(a+b\right)} \ge \frac{3}{2}$$

ចំលើយ

តាង $a = 1/x, b = 1/y, c = 1/z$ យើងទាញបាន $xyz = 1$ ។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វ័ស៑

$$\left[\left(y+z\right)+\left(z+x\right)+\left(x+y\right)\right]\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)$$

$$\ge \left(x+y+z\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x+y+z}{2}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\left(xyz\right)^{1/3}}{2} = \frac{3}{2}$$

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៥)

លំហាត់ 57

(អន្តរជាតិ ២001)

តាង a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

ចំលើយ

យើងតាង

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}, y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}, z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$

យើងឃើញថា $x, y, z \in \left(0, 1\right)$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $x+y+z \geq 1$ ។ យើងមាន

$$\frac{a^2}{8bc} = \frac{x^2}{1-x^2}, \frac{b^2}{8ac} = \frac{y^2}{1-y^2}, \frac{c^2}{8ab} = \frac{z^2}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{512} = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{y^2}{1-y^2}\right)\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)$$

យើងត្រូវបង្ហាញថា $x+y+z \geq 1$ ដែល $0 < x, y, z < 1$ និង

$$\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right) = 512\left(xyz\right)^2$$

ឧបមាថា $1 > x+y+z$ ។ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)$$

$$> \left[\left(x+y+z\right)^2 - x^2\right]\left[\left(x+y+z\right)^2 - y^2\right]\left[\left(x+y+z\right)^2 - z^2\right]$$

$$= \left(x+x+y+z\right)\left(y+z\right)\left(x+y+y+z\right)\left(z+x\right)\times$$

$$\left(x+y+z+z\right)\left(x+y\right)$$

$$\geq 4\left(x^2yz\right)^{1/4}.2\left(yz\right)^{1/2}.4\left(y^2zx\right)^{1/4}.2\left(zx\right)^{1/2}.4\left(z^2xy\right)^{1/4}.2\left(xy\right)^{1/2}$$

$$= 512\left(xyz\right)^2$$ ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ។

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៥)

លំហាត់ 58

(អន្តរជាតិ ១៩៨៤)

តាង x, y, z ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $x+y+z=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

ចំលើយ

តាង $f\left(x,y,z\right) = xy + yz + zx - 2xyz$ ។ យើងអាចសន្មតថា

$$0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$$

ដោយ $x+y+z=1$ នោះ $x \leq \dfrac{1}{3}$ ។ ដូច្នេះ

$$f\left(x,y,z\right) = \left(1-3x\right)yz + xyz + zx + xy \geq 0$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

ដោយ $1-2x \geq 0$ នោះ

$$f(x,y,z) = x(y+z) + yz(1-2x)$$
$$\le x(1-x) + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2(1-2x)$$
$$= \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{4}$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងត្រូវរកតំលៃធំបំផុតរបស់អនុគមន៍មួយអថេរ

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(-2x^3 + x^2 + 1\right) \text{ ដែល } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

យើងមាន $F'(x) = \frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3} - x\right) \ge 0$ លើ $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ យើងទាញបាន

$$F(x) \le F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27} \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]។$$

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៥)

៤

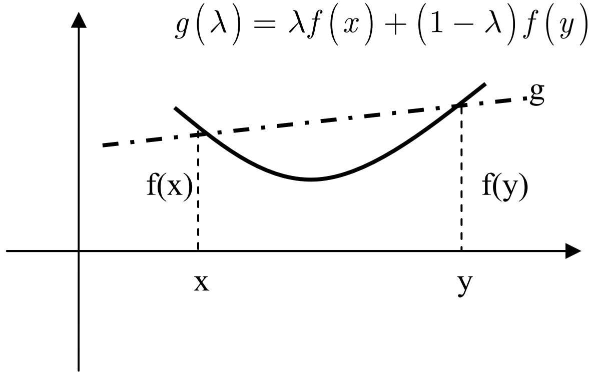
ភាពផត

និយមន័យ

អនុគមន៍ f មួយ ដែលកំនត់លើ $I \in \mathbb{R}$ ហៅថា ផត បើ ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \left[0,1\right]$ និង គ្រប់ $x, y \in I$ គេមាន

$$f\left(\lambda x + \left(1-\lambda\right)y\right) \le \lambda f\left(x\right) + \left(1-\lambda\right)f\left(y\right)$$

$$g\left(\lambda\right) = \lambda f\left(x\right) + \left(1-\lambda\right)f\left(y\right)$$



សំគាល់

ក) ក្នុងនិយមន័យខាងលើ ដែន $E = \left\{\left(x,y\right) \in \mathbf{I} \times \mathbb{R} \;/\; y \ge f\left(x\right)\right\}$ ផត។

ខ) យើងថា f ប៉ោង បើសិនជា $-f$ ផត។

គ) យើងឃើញថា អនុគមន៍ f ផតលើ I ទាល់តែនិងនាំអោយ តង់សង់របស់ ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍នេះកើន លើ I។ ដូច្នេះ បើ f មានដេរីវេ លើ I នោះ f ផត ទាល់តែនិងនាំអោយ f' កើនលើ I។

ឃ) បើ f មានដេរីវេពីរដងលើ I នោះ អនុគមន៍ f ផត ទាល់តែនិងនាំអោយ $f'' \geq 0$ លើ I។

ង) អនុគមន៍មួយផតដាច់ខាតជាប់លើ I មានតំលៃអតិបរមាត្រង់ចំនុចមួយ មិននៅក្នុង I ព្រោះថា បើ f មានតំលៃអតិបរមា នៅត្រង់ចំនុច a ដែលមិននៅចំដែនរបស់ I នោះ គេអាចរកបានអង្កត់ភ្ជាប់រវាង $\left(a-\varepsilon, f\left(a-\varepsilon\right)\right)$ និង $\left(a+\varepsilon, f\left(a+\varepsilon\right)\right)$ ដែលមិននៅខាងលើ ខ្សែកោងរបស់ f។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.១ វិសមភាពយិនសិន

តាង $n \geq 1$ ជាចំនួនគត់ ហើយ f ជាអនុគមន៍ផត លើដែន I។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ គ្រប់ $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ គេមាន

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\right) \leq \lambda_1 f\left(x_1\right) + \lambda_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \lambda_n f\left(x_n\right)$$

ហើយ បើ f ប៉ោងដាច់ខាត នោះកន្សោមខាងលើក្លាយជាសមភាព ពេល

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

សំរាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $n = 1$ សំនើខាងលើពិត។

ចំពោះ $n = 2$ វាជានិយមន័យរបស់ភាពផត។ សន្មតថាពិតរហូតដល់ n។

យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \left(1-\lambda_{n+1}\right) y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

ដែល $y = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k$ និង $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \left(1-\lambda_{n+1}\right) f\left(y\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right)$$
$$\leq f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right)$$

យ៉ូហាន យិនសិន

(Johan Jensen)

ឈ្មោះពេញ យ៉ូហាន លុយឌ្វិច វីលាម វ៉ាល់ដឺមែរ យិនសិន

(Johan Ludwig William Valdemar Jensen)

(ឧសភា ១៨៥៩ - កុម្ភៈ ១៩២៥) គណិតវិទូ និង វិស្វករជាតិដាណឺម៉ាក។ គេស្គាល់គាត់ដោយសារវិសមភាពយិនសិន។ ក្នុងឆ្នាំ ១៩១៥ គាត់បានបង្ហាញថារូបមន្តវិសមភាពរបស់គាត់អាចប្រើបានលើ វិភាគកុំផ្លិច។

និយមន័យ

គេអោយ ចំនួនគត់ $n \geq 2$ បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត $a_1, a_2, \cdots, a_n$ និង បណ្តា ចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$។

យើងកំនត់អនុគមន៍ M លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ $M(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$។

គេហៅ $M(\alpha)$ ថា មធ្យមលំដាប់ α នៃបណ្តាចំនួន a_i ផ្សំនឹងមេគុណ λ_i។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.២ វិសមភាពមធ្យមលំដាប់ α

គេអោយ $a_1, \cdots, a_n > 0$ មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ និង $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ។ នោះអនុគមន៍ $M(\alpha)$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ មានន័យថា
ចំពោះគ្រប់ $a_1, \cdots, a_n > 0$ និង $\alpha < \beta$ គេមាន $M(\alpha) \leq M(\beta)$
ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$។

សំរាយបញ្ជាក់

បើគ្រប់ a_i ស្មើគ្នាទាំងអស់ នោះអនុគមន៍ M ថេរលើ $\mathbb{R}^*$ ។ ឥលូវនេះ យើងសន្មតថា បណ្តា a_i មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ទេ។
យើងមាន

$$\ln(M(\alpha)) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{\alpha}\right) = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

យើងមាន $\lim\limits_{\alpha\to 0} a_i^{\alpha} = 1$ ចំពោះគ្រប់ $a_i > 0$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{\alpha\to 0} f\left(\alpha\right) = 0$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត ដោយ $f'\left(\alpha\right) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i \ln\left(a_i\right) a_i^{\alpha}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}}$ នាំអោយ

$$\lim_{\alpha\to 0} f'\left(\alpha\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i \ln\left(a_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \ln\left(a_i\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}\right)$$

តាមក្បួន អូពីតាល់ យើងទាញបាន $\lim\limits_{\alpha\to 0} \ln\left(M\left(\alpha\right)\right) = \ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}\right)$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\alpha\to 0} M\left(\alpha\right) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}$$

ដូច្នេះ ដោយយក $M\left(0\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}$ យើងបន្លាយ M ដោយភាពជាប់ត្រង់ 0 ។

ក) ករណី $\alpha > 1$

អនុគមន៍ $f\left(x\right) = x^{\alpha}$ ផតជាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ ដូច្នេះ $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha} > \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)^{\alpha}$ ។

វិសមភាពនេះ ដាច់ខាត ព្រោះ បណ្តា a_i មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ទេ។

ដូច្នេះ $M\left(\alpha\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} > \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i = M\left(1\right)$

១) ករណី $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ករណីទី១: $0 < \alpha < \beta$

តាង $t = \beta / \alpha > 1$ ។ ចំពោះគ្រប់ $i \in \left\{1, \cdots, n\right\}$ យើងតាង $b_i = a_i^{\alpha}$ ។ តាម ក) យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^t\right)^{1/t} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{\beta}\right)^{\alpha/\beta} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad M\left(\beta\right) > M\left(\alpha\right)$$

ករណីទី២: $\alpha < \beta < 0$

តាង $t = \dfrac{\alpha}{\beta} > 1$ ។ ចំពោះគ្រប់ $i \in \left\{1, \cdots, n\right\}$ យើងតាង $b_i = a_i^{\beta}$ ។ តាម ក) យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^t\right)^{1/t} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{\alpha}\right)^{\beta/\alpha} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{\beta}$$

$$\Rightarrow \quad M\left(\beta\right) > M\left(\alpha\right)$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ M កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$ ហើយជាប់ត្រង់ 0 ។ ដូច្នេះ វាកើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

សំគាល់

<u>ចំពោះ $\alpha > 0$</u>

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a_1 = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$។

ដូច្នេះ

$$\ln\left(M\left(\alpha\right)\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(a_1^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \ln\left(M\left(\alpha\right)\right) = \ln\left(a_1\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right)$$

ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន $0 < \frac{a_i}{a_1} \le 1$។ ដូច្នេះ $0 < \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha} \le 1$។

ហើយ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha} = \lambda_1 + \sum_{i=2}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha} \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ ។

ដូច្នេះ $\frac{\ln\left(\lambda_1\right)}{\alpha} \le \frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right) \le 0$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\alpha\to+\infty}\ln\left(M\left(\alpha\right)\right) = \ln\left(a_1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\alpha\to+\infty}M\left(\alpha\right) = \max\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}$$

<u>ចំពោះ $\alpha < 0$</u>

លើកនេះយើងសន្មតថា $a_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$។ ដូចខាងលើ យើងមាន

$$\ln\left(M\left(\alpha\right)\right) = \ln\left(a_1\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right)$$

ដែល $\dfrac{a_i}{a_1} \geq 1$ ចំពោះគ្រប់ i ។ ដូច្នេះ $0 < \left(\dfrac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha} \leq 1$ ។

តាមវិចារដូចករណីខាងលើ យើងទាញបាន

$$\lim_{\alpha \to -\infty} M\left(\alpha\right) = \min\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}$$

ដូច្នេះ

$$\lim_{\alpha \to +\infty} M\left(\alpha\right) = \max\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}$$

$$\lim_{\alpha \to -\infty} M\left(\alpha\right) = \min\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}$$

ហើយដោយអនុគមន៍ M កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $\alpha \in \mathbb{R}$ គេមាន

$$\min\left\{a_1, \cdots, a_n\right\} < M\left(\alpha\right) < \max\left\{a_1, \cdots, a_n\right\}$$

វិបាក

ចំពោះ $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ **យើងមាន**

$$\min\left\{a_1, \cdots, a_n\right\} \leq M\left(-1\right) \leq M\left(0\right)$$
$$\leq M\left(1\right) \leq M\left(2\right) \leq \max\left\{a_1, \cdots, a_n\right\}$$

រឺ

$$\min\left\{a_1, \cdots, a_n\right\} \leq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \leq \left(a_1 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \leq \max\left\{a_1, \cdots, a_n\right\}$$

សមភាពកើតមាន ពេល $a_1 = \cdots = a_n$ ។

លំហាត់ 59

គេអោយចំនួនពិត a, b, c វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល $a+b+c=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

ចំលើយ

$$\frac{1}{3}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right]$$

$$\geq \left(\frac{a+b+c}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{(abc)^{1/3}}\right)^2 \quad \text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$\geq \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2 \quad \text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$\geq \left(\frac{1}{3}+3\right)^2 = \frac{100}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

លំហាត់ 60

គេអោយ A, B, C ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $\sin(x)$ ប៉ោងលើ $[0, \pi]$ ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន

$$\sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $A = B = C$ (ត្រីកោណសម័ង្ស)។

អនុគមន៍ $\cos(x)$ មិនប៉ោងមិនផតលើ $[0, \pi]$។ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីនៃអញ្ញាត យើងអាចសន្មតថា $A \ge B \ge C$ ។

-បើ $A \le \frac{\pi}{2}$: ដោយ $\cos(x)$ ប៉ោងលើ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ នោះ

$$\cos A + \cos B + \cos C \le 3\cos\frac{A+B+C}{3} = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $A = B = C$ (ត្រីកោណសម័ង្ស)។

- បើ $A > \frac{\pi}{2}$ នោះ $\frac{\pi}{2} > B \ge C$ ។ ដោយ $\cos(x)$ ប៉ោងលើ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ នោះ

$$\cos B + \cos C \le 2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = 2\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos A + \cos B + \cos C \le \cos A + 2\sin\frac{A}{2}$$

$$= -2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} + 1$$

$$= -2\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$$

វិសមភាពនេះដាច់ខាត ព្រោះ $\frac{A}{2} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ ដូច្នេះ $\sin\frac{A}{2} \neq \frac{1}{2}$។

ដូច្នេះ $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើត្រីកោណជាត្រីកោណសម័ង្ស។

លំហាត់ 61

(កូរ៉េ ១៩៩៨)

គេអោយ $a, b, c > 0$ ដែល $a + b + c = abc$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

ចំលើយ

តាង $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$។ ដូច្នេះ x, y, z ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណស្រួចមួយ។ យើងមាន

$$\cos x + \cos y + \cos z \leq \frac{3}{2}$$

វិសមភាពនេះពិត ដូចការស្រាយបញ្ជាក់ក្នុងលំហាត់ខាងលើ។
យើងមានសមភាពពេល $a = b = c = \sqrt{3}$។

លំហាត់ 62

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេមាន

$$\frac{\left(a + 2b + 3c\right)}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \leq 6$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{3}{6}c \leq \left(\frac{1}{6}a^2 + \frac{2}{6}b^2 + \frac{3}{6}c^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\left(a + 2b + 3c\right)}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \leq 6$$

លំហាត់ 63

គេអោយ $a, b \geq 0$ និង $p, q > 1$ ដែល $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

ចំលើយ

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តធរណីមាត្រមានមេគុណ យើងទាញបាន

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq \left(a^p\right)^{1/p}\left(b^q\right)^{1/q} = ab$$

លំហាត់ 64

ចូរកំនត់ចំនួនថេរ M តូចបំផុត ដែល ចំពោះគ្រប់ $a, b > 0$ គេមាន

$$a^{1/3} + b^{1/3} \le M\left(a+b\right)^{1/3}$$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $f\left(x\right) = x^{1/3}$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left]0, +\infty\right[$ ។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងមាន

$$\frac{a^{1/3} + b^{1/3}}{2} \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^{1/3} \Rightarrow a^{1/3} + b^{1/3} \le \frac{2}{2^{1/3}}\left(a+b\right)^{1/3}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និងនាំអោយ $a = b$ ។

ដូច្នេះចំនួនថេរ M តូចបំផុត គឺ $M = \dfrac{2}{2^{1/3}} = 4^{1/3}$ ។

លំហាត់ 65

គេអោយ $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \ge \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ផតលើ $\left]1, +\infty\right[$ ។ ដោយ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ នោះបណ្តា x_i អាចប្រើជាមេគុណក្នុងវិសមភាពយិនសិនបាន។ ដូច្នេះ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វ័ស យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-1/n}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ ។

លំហាត់ 66

(អូទ្រីស ២000)

គេអោយ $a, b > 0$ និង $n \in \mathbb{Z}$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

ចំលើយ

បើ $n \geq 0$ អនុគមន៍ $f(x) = x^n$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ ដូច្នេះ

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2\left(\frac{1+a/b+1+b/a}{2}\right)^n$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right)^n$$

តែថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ នោះ $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2\times 2^n = 2^{n+1}$

បើ $n<-1$ តាង $p=-n>1$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^p}{(a+b)^p}+\frac{a^p}{(a+b)^p} \geq \frac{1}{2^{p-1}}$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{b^p+a^p}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$ វិសមភាពនេះពិត តាមវិសមភាពយិនសិន ដោយពិនិត្យលើភាពប៉ោងរបស់អនុគមន៍ $f(x)=x^p$ លើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ យើងឃើញថា អង្គទាំងពីរនៃវិសមភាព ស្មើគ្នា ទាល់តែ និងនាំអោយ $n\in\{0,-1\}$ និង a,b យ៉ាងម៉េចក៏បាន រឺ $n\notin\{0,-1\}$ និង $a=b$ ។

លំហាត់ 67

(អន្តរជាតិ ២០០១)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\lambda\geq 8$ និង $a,b,c>0$ គេមាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

ចំលើយ

យើងឃើញថាវិសមភាពខាងលើនៅដដែល បើយើងជំនួស (a,b,c) ដោយ $(\alpha a,\alpha b,\alpha c)$ (វិសមភាពអូម៉ូសែន)។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a+b+c=1$(*)។

អនុគមន៍ $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ជាអនុគមន៍ផត ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន និង (*) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\\&\qquad\ge\frac{1}{\sqrt{a\left(a^2+\lambda bc\right)+b\left(b^2+\lambda ca\right)+c\left(c^2+\lambda ab\right)}}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$a\left(a^2+\lambda bc\right)+b\left(b^2+\lambda ca\right)+c\left(c^2+\lambda ab\right)\le\frac{1+\lambda}{9}$$

$$\Leftrightarrow\qquad a^3+b^3+c^3+3\lambda abc\le\frac{1+\lambda}{9}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}a^3+b^2+c^3&=\left(a+b+c\right)^3\\&\quad-3\left(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc\right)\end{aligned}$$

តាម(*) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3+3\lambda abc\\&=1-3\left(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2\right)+3\left(\lambda-2\right)abc\\&\le1-3\times6abc+3\left(\lambda-2\right)abc\qquad\text{(វិសមភាពកូស៊ី)}\\&=1+3\left(\lambda-8\right)abc\\&\le1+3\left(\lambda-8\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\text{(វិសមភាពកូស៊ី និង ដោយសារ }\lambda\ge8\text{)}\\&=1+\frac{\lambda-8}{9}=\frac{1+\lambda}{9}\ \text{ពិត}\end{aligned}$$

សមភាពកើតមានពេលវិសមភាពកូស៊ីទៅជាសមភាព មានន័យថា $a=b=c$ ។

លំហាត់ 68
(អាមេរិច ១៩៨០)

គេអោយ $a,b,c\in\left[0,1\right]$ ។ **ចូរបង្ហាញថា**

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)\le 1$$

ចំលើយ

តាង

$$f\left(a\right)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)$$

ដោយចាត់ទុកថា b,c ជាចំនួនថេរ។ យើងឃើញថា f ជាអនុគមន៍ផតធៀបនឹង a ដូច្នេះ តំលៃធំបំផុតរបស់វា គឺនៅត្រង់ $a=0$ រឺ $a=1$ ។ តាមវិចារដូចគ្នា យើងទាញបានថា f មានតំលៃធំបំផុត នៅត្រង់ចំនុចមួយ (រឺច្រើនជាងមួយ) ក្នុងចំនោមត្រីធាតុ$\left(a,b,c\right)$ ចំនួនប្រាំបី ដែល $a,b,c\in\left\{0,1\right\}$ ។ យើងពិនិត្យឃើញថា ចំពោះត្រីធាតុនិមួយៗ តំលៃរបស់អនុគមន៍ f ស្មើ 1 ។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

លំហាត់ 69

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 1$។ តាង $\alpha, t \in [1; +\infty[$ និង $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$។

តាង $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha} + \frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t \geq n\left(\frac{1}{n^{\alpha}} + n^{\beta}\right)^t$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$។

ចំលើយ

ដោយអនុគមន៍ $f(x) = x^t$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ នោះតាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha} + \frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t \geq n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha} + \frac{1}{a_i^{\beta}}\right)\right)^t \qquad (*)$$

$$= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t$$

តែ

ក) ដោយ $\alpha \geq 1$ នោះអនុគមន៍ $f(x) = x^{\alpha}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ខ) ដោយ $\beta > 0$ នោះអនុគមន៍ $f(x) = x^{\alpha}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{\beta}} \geq \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{\beta} = n^{\beta}$$

តាម (*) ក) និង ១) យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha} + \frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^{t} \geq n\left(\frac{1}{n^{\alpha}} + n^{\beta}\right)^{t}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ។ ដោយ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ នោះ

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$ ។

លំហាត់ 70

(អាមេរិច ១៩៧៧)

គេអោយ $0 < p \leq a, b, c, d, e \leq q$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2}$$

ចំលើយ

អង្គខាងឆ្វេងជាអនុគមន៍ផត ចំពោះអថេរនិមួយៗ ដោយទប់អថេរផ្សេងទៀត។ វាមានតំលៃធំបំផុតនៅត្រង់ចំនុចមួយនៃបញ្ចធាតុ(a, b, c, d, e) ទាំង32 ដែល $a, b, c, d, e \in \{p, q\}$ ។

តាង n ជាចំនួនអថេរ ដែលស្មើ p ហើយដូច្នេះ $5-n$ អថេរផ្សេងទៀតស្មើ q ដែល $n\in\left\{0,1,2,3,4,5\right\}$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរកតំលៃធំបំផុតរបស់

$$f\left(n\right)=\left(np+\left(5-n\right)q\right)\left(\frac{n}{p}+\frac{5-n}{q}\right)$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} f\left(n\right) &= n^2+\left(5-n\right)^2+n\left(5-n\right)\left(\frac{q}{p}+\frac{p}{q}\right)\\ &= n^2+\left(5-n\right)^2+2n\left(5-n\right)+n\left(5-n\right)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2\\ &= 25+n\left(5-n\right)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f\left(n\right)$ ធំបំផុត បើ $n\left(5-n\right)=\frac{25}{4}-\left(n-\frac{5}{2}\right)^2$ មានតំលៃធំបំផុត មានន័យ

ថា $n=2$ រឺ $n=3$ ។ ដូច្នេះ $f_{\max}=25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$ ។

លំហាត់ 71

(ប៉ូឡូញ ១៩៩៥)

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 1$ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតរបស់ផលបូក

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^n}{n}$$

ដែល $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ជាចំនួនពិត ដែល $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n$ ។

ចំលើយ

តាង $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ និង ចំពោះ $i = 1, \cdots, n$ តាង $\omega_i = \frac{1}{iH_n}$ ។

យើងមាន $\omega_i > 0$ ហើយ $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \frac{1}{H_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{H_n} H_n = 1$ ។

តាង $S = x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^2}{n}$ ។ យើងមាន

$$\frac{S}{H_n} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{i\omega_i}$$

(តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តធរណីមាត្រផ្សំមេគុណ)

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/H_n}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $$\prod_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \right) = 1$$

ដូច្នេះ $\dfrac{S}{H_n} \geq 1$ ហើយស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ ។

លំហាត់ 72

(លំហាត់ស្នើទៅសិស្សពូកែអន្តរជាតិ ១៩៩៨)

គេអោយ $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{1+\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{1/n}}$$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $f\left(x\right) = \dfrac{1}{1+e^x}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ព្រោះ $f''\left(x\right) = \dfrac{e^{2x} - e^x}{\left(1+e^x\right)^3} \geq 0$ ។

ចំពោះ $i = 1, 2, \cdots, n$ តាង $x_i = e^{y_i}$ ។ ដោយ $x_i \geq 1$ នោះ $y_i \geq 0$ ។

តាមវិសមភាពយិនសិន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{y_i}+1} \geq \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}+1} = \frac{1}{\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}+1}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ។

លំហាត់ 73

(អ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៨)

គេអោយ $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ ដែល $x_1x_2x_3x_4 = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i},\right\}$$

ចំលើយ

តាង $A = \sum_{i=1}^{4} x_i^3$ និង $A_i = A - x_i^3 \Rightarrow A = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} A_i$ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន $\frac{1}{3}A_1 \geq \left(x_2^3x_3^3x_4^3\right)^{1/3} = x_2x_3x_4 = \frac{1}{x_1}$ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន $\frac{1}{3}A_i \geq \frac{1}{x_i}$ ចំពោះ $i = 2, 3, 4$ ។

$$\Rightarrow \quad A \geq \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i} \qquad (១)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 3 និង 1 និង វិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i^3 &\geq \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)
\end{aligned}$$

ព្រោះ $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i \geq \left(x_1x_2x_3x_4\right)^{\frac{1}{4}} = 1$

$$\Rightarrow \qquad A \geq \sum_{i=1}^{4} x_i \qquad\qquad (២)$$

(១) និង (២) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i},\right\}$

លំហាត់ 74

គេអោយ $x, y, z \geq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$8\left(x^3+y^3+z^3\right)^2 \geq 9\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)$$

ចំលើយ

បើមានចំនួនណាមួយស្មើសូន្យ ឧទាហរណ៍ $z=0$ នោះ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$8\left(x^6+y^6+2x^3y^3\right) \geq 9x^3y^3$$

ពិត ហើយស្មើគ្នាពេល $x=y=z=0$ ។

បើ $x, y, z > 0$ យើងមាន

$$\begin{aligned} 9\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right) & \\ &\leq \frac{9}{8}\left(2x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+2y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+2z^2\right) \\ &\leq \frac{9}{8}\left[\frac{4\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3}\right]^3 \text{ ពិត (តាមវិសមភាពកូស៊ី)} \end{aligned}$$

$$= 9 \times 8 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^3$$

$$\leq 9 \times 8 \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right)^2 \text{ (តាម មធ្យមលំដាប់៣និង២)}$$

$$= 8\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $x = y = z$ ។

លំហាត់ 75

គេអោយចំនួនគត់ $n > 1$ និង $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ ដែល

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n - 1}}$$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$ ជាអនុគមន៍ផត។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n - 1}}$$

ម៉្យាងវិញទៀត តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 1 និង $\dfrac{1}{2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow\qquad\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leq\sqrt{n}\Rightarrow\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}\leq\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$ ពិត។

លំហាត់ 76

គេអោយ α,β,γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណមួយ និង $n\in\mathbb{N}^*$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\cot^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot^n\left(\frac{\beta}{2}\right)+\cot^n\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot^n\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\cot^n\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cot^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\geq 3^{n+1}$$

ចំលើយ

តាង

$$A_n=\cot^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot^n\left(\frac{\beta}{2}\right)+\cot^n\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot^n\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\cot^n\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cot^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$B=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)+\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វ័ស យើងទាញបាន $A_1\times B\geq 9$ ។

ដោយ α,β,γ ជាមុំត្រីកោណ នោះ

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$\Rightarrow \qquad B = 1 \Rightarrow \ A_1 \geq 9$ ។

តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ n និង 1 យើងទាញបាន

$$\frac{A_n}{3} \geq \left(\frac{A_1}{3}\right)^n \Rightarrow \ A_n \geq 3^{n+1}$$

សមភាពកើតមានពេល ត្រីកោណជាត្រីកោណសម័ង្ស។

លំហាត់ 77

(ទួរគី ១៩៩៧)

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$។ ចូរគណនាតំលៃតូចបំផុតនៃ

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}$$

ដែល $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ **ហើយ** $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$។

ចំលើយ

តាង $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វ័ស៊

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5}{S - x_i}\right]\left[\sum_{i=1}^{n} (S - x_i)\right] \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^5}\right)^2$$

$$= n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{5/2}\right)^2$$

$$\geq n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{2}\right)^{5/2} \text{ (តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ } \frac{5}{2} \text{ និង } 2\text{)}$$

$$= \frac{n^2}{n^{5/2}}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ។

ម៉្យាងវិញទៀត

$$0 < \sum_{i=1}^{n}\left(S - x_i\right) = \left(n-1\right)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= n\left(n-1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$$

$$\leq n\left(n-1\right)\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ (តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 1 និង 2)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \sum_{i=1}^{n}\left(S - x_i\right) \leq \frac{n\left(n-1\right)}{\sqrt{n}}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ។

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{S - x_i}\right] \geq \frac{n^2}{n^{5/2}} \times \frac{\sqrt{n}}{n\left(n-1\right)} = \frac{1}{n\left(n-1\right)}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ។

លំហាត់ 78
(អាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ២០០៤)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9\left(ab+bc+ca\right)$$

ចំលើយ

តាង $A,B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ដោយ $a=\sqrt{2}\tan A, b=\sqrt{2}\tan B$ និង $c=\sqrt{2}\tan C$ ។ តាមទំនាក់ទំនង $1+\tan^2\theta = 1\big/\cos^2\theta$ វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$\frac{4}{9}\geq \cos A\cos B\cos C\times$$
$$\times\left(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C\right)$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\cos\left(A+B+C\right) &= \cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C\\ &\quad -\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C\end{aligned}$$

ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\frac{4}{9}\geq \cos A\cos B\cos C\left(\cos A\cos B\cos C-\cos\left(A+B+C\right)\right)$$

តាង $\theta=\dfrac{A+B+C}{3}$ ។ តាមវិសមភាពកូស៊ី និង វិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\cos A\cos B\cos C\leq\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\leq\cos^3\theta$$

យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\frac{4}{9} \geq \cos^3\theta\Big(\cos^3\theta - \cos 3\theta\Big)$$

យើងមាន

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^3\theta - \cos 3\theta = 3\cos\theta - 3\cos^3\theta$$

ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\frac{4}{27} \geq \cos^4\theta\Big(1 - \cos^2\theta\Big) \qquad \text{(*)}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{2}.\frac{\cos^2\theta}{2}.\Big(1-\cos^2\theta\Big)\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\left[\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{2} + \Big(1-\cos^2\theta\Big)\right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ (*) ពិត។ សមភាពកើតមាន ទាល់តែនិងមានតែ

$$\tan A = \tan B = \tan C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad a = b = c = 1$$

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៥)

៨

វិសមភាពស៊ីមេទ្រី រ៉ឺ ស៊ីក្លិច

លំហាត់ 79

(ស្មើទៅការប្រលងសិស្សពូកែអាមេរិច ១៩៩៩)

គេអោយ $x, y, z > 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geq \left(xyz\right)^{xy+yz+zx}$$

ចំលើយ

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\begin{aligned} &\left(x^2+2yz\right)\ln x + \left(y^2+2zx\right)\ln y + \left(z^2+2xy\right)\ln z \\ &\geq \left(xy+yz+zx\right)\left(\ln x + \ln y + \ln z\right) \\ \Leftrightarrow\quad &\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ln x + \left(y-z\right)\left(y-x\right)\ln y \\ &+\left(z-x\right)\left(z-y\right)\ln z \geq 0 \end{aligned}$$

យើងមាន $\ln x, \ln y, \ln z > 0$ ព្រោះ $x, y, z > 1$។

វិសមភាពខាងលើមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី (ជំនួស x ដោយ y រឺ ដោយ z គ្មានអ្វីប្រែប្រួល)។

ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$។ ដូច្នេះ

$$\left(z-x\right)\left(z-y\right)\ln z \geq 0$$

បន្ទាប់មកទៀត អនុគមន៍ $\ln$ ជាអនុគមន៍កើន លើ $\mathbb{R}^{+*}$ យើងទាញបាន

$$\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ln x \geq \left(y-z\right)\left(x-y\right)\ln y$$

ព្រោះ កត្តានិមួយៗ សុទ្ធតែ វិជ្ជមានរឺសូន្យ ហើយកត្តានិមួយៗនៅអង្គខាងឆ្វេង ធំជាងកត្តានិមួយៗនៃអង្គខាងស្តាំ។

៥.១ អូម៉ូសែនូបនីយកម្ម

វិសមភាពមួយ អូម៉ូសែន បើ គេដូរ អញ្ញាត $\left(x,y,z\right)$ ដោយ $\left(\lambda x,\lambda y,\lambda z\right)$ វិសមភាពនៅដដែល។
សំនួរវិសមភាពជាច្រើន ច្រើនមានលក្ខខណ្ឌដូចជា $ab=1, xyz=1,$
$x+y+z=1$។ វិសមភាពមួយ ដែលមិនស៊ីមេទ្រីអូម៉ូសែន អាចបំលែងជាវិសមភាពអូម៉ូសែនបាន។ បន្ទាប់មកយើងនឹងប្រើទ្រឹស្តីបទមួរហ៊ែដ និងវិសមភាពឈួរ។

លំហាត់ 80

(ហុងគ្រី ១៩៩៦)

តាង a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a+b=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq\frac{1}{3}$$

ចំលើយ

ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌ $a+b=1$ យើងបំលែងវិសមភាពដែលអោយទៅជាវិសមភាពអូម៉ូសែន

$$\frac{1}{3}\leq\frac{a^2}{\left(a+b\right)\left(a+\left(a+b\right)\right)}+\frac{b^2}{\left(a+b\right)\left(b+\left(a+b\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad a^2b + ab^2 \le a^3 + b^3$$

យើងមាន

$$\left(a^3 + b^3\right) - \left(a^2b + ab^2\right) = \left(a-b\right)^2\left(a+b\right) \ge 0 \text{ ។}$$

សមភាពកើតមាន ពេល $a = b = \dfrac{1}{2}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៥.១.១

តាង a_1, a_2, b_1, b_2 ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ និង $\max\left(a_1, a_2\right) \ge \max\left(b_1, b_2\right)$ ។ តាង x និង y ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ នោះគេមាន $x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} \ge x^{b_1}y^{b_2} + x^{b_2}y^{b_1}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងអាចសន្មតថា $a_1 \ge a_2, b_1 \ge b_2, a_1 \ge b_1$ ដោយមិនធ្វើអោយបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅទេ។ បើ x រឺ y ស្មើសូន្យ នោះវិសមភាពខាងលើពិត។ ដូច្នេះ សន្មតថា x និង y មិនសូន្យទាំងពីរ។ បន្ទាប់មកទៀត វិសមភាពស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y ដូច្នេះ សន្មតថា $x \ge y$ ។

ដោយ $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ នោះ

$$a_1 - a_2 = \left(b_1 - a_2\right) + \left(b_2 - a_2\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} - x^{b_1}y^{b_2} - x^{b_2}y^{b_1} \\
&= x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-a_2} + y^{a_1-a_2} - x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2} - x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}\right) \\
&= x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2}\right)\left(x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2}\right) \\
&= x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-b_2} - y^{a_1-b_2}\right)\left(x^{a_1-b_1} - y^{a_1-b_1}\right)
\end{aligned}$$

$$= x^{a_2}y^{a_2}y^{a_1-b_2}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-b_2}-1\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-b_1}-1\right)\geq 0 \text{ ពិត}$$

និយមន័យ: ភាពស៊ីមេទ្រី និង ស៊ីគ្លិច

តាង $P(x,y,z)$ ជាអនុគមន៍មានបីអថេរ x,y,z ។ តាង

$$\sum_{\text{cyclic}} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y)$$

$$\sum_{\text{sym}} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(x,z,y) + P(y,x,z)$$

$$+P(y,z,x) + P(z,x,y) + P(z,y,x)$$

ឧទាហរណ៍

$$\sum_{\text{cyclic}} x^3y = x^3y + y^3z + z^3x$$

$$\sum_{\text{sym}} x^3 = 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$$

$$\sum_{\text{sym}} x^2y = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$$

$$\sum_{\text{sym}} xyz = 6xyz$$

លំហាត់ 81

(អ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៨)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x,y,z>1$ ដែល $1/x+1/y+1/z=2$ គេមាន

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

ចំលើយ

តាង $a=1/x, b=1/y, c=1/z$ នោះ $a,b,c\in(0,1)$ និង $a+b+c=2$ ។

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\geq\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}$$

យើងបំលែងវាទៅជាអូម៉ូសែនដោយសរសេរជា

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$\geq\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{a}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-b}{b}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$\geq\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{\left((b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$\geq\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$$

ពិត តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វ័ស៊្ស។

ទ្រឹស្តីបទ ៥.១.២ វិសមភាពឈ៉័រ

តាង x, y, z ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ ចំពោះគ្រប់ $r > 0$ យើងមាន

$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$

ឬ $\sum_{\text{cyclic}} x^r(x-y)(x-z) \geq 0$

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយវិសមភាពខាងលើ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងអថេរទាំងបី យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$
ដោយមិនបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅអ្វីទាំងអស់។ វិសមភាពដែលអោយ អាចសរសេរជា

$$(x-y)\left[x^r(x-z) - y^r(y-z)\right] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

ពិត ព្រោះតួនិមួយៗ សុទ្ធតែវិជ្ជមានទាំងអស់។

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និង មានតែ $x = y = z$ ។

លំហាត់ 82

គេអោយ $a, b, c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\ &\geq 2\left[(ab)^{3/2} + (bc)^{3/2} + (ca)^{3/2}\right] \end{aligned}$$

ចំលើយ

វិសមភាពខាងឆ្វេងដែលអោយមក សមមូលនឹង

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

ពិត តាមវិសមភាពឈួរ ករណី $r=1$។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ $a=b=c$។

វិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{cyclic}}\left(a^2b+ab^2\right)\geq\sum_{\text{cyclic}}2\left(ab\right)^{3/2} \qquad \text{ពិតតាមវិសមភាពកូស៊ី។}$$

លំហាត់ 83

តាង $t\in\left(0,3\right]$ ។ ចំពោះគ្រប់ $a,b,c\geq 0$ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(3-t\right)+t\left(abc\right)^{2/t}+\sum_{\text{cyclic}}a^2\geq 2\sum_{\text{cyclic}}ab$$

ចំលើយ

តាង $x=a^{2/3},y=b^{2/3},z=c^{2/3}$ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$3-t+t\left(xyz\right)^{3/t}+\sum_{\text{cyclic}}x^3\geq 2\sum_{\text{cyclic}}\left(xy\right)^{3/2}$$

តាមសំនួរខាងលើ យើងមាន

$$\sum_{\text{cyclic}}x^3+3xyz\geq 2\sum_{\text{cyclic}}\left(xy\right)^{3/2}$$

ដូច្នេះ ពេលនេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$3-t+t\left(xyz\right)^{3/t}\geq 3xyz$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{3-t}{3}.1+\frac{t}{3}\left(xyz\right)^{3/t}\geq 1^{\frac{3-t}{3}}.\left[\left(xyz\right)^{3/t}\right]^{t/3}=xyz$$

ពិតតាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តធរណីមាត្រភ្ជាប់មេគុណ។ យើងឃើញថាអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b=c=1$។

ករណីពិសេស: ចំពោះ $t = 1\,/\,2;1;2$ យើងមាន

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\left(abc\right)^4 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\left(ab + bc + ca\right)$$

$$2 + \left(abc\right)^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\left(ab + bc + ca\right)$$

$$1 + 2abc + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\left(ab + bc + ca\right)$$

លំហាត់ 84

(អាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ២០០៤)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b, c

$$\left(a^2 + 2\right)\left(b^2 + 2\right)\left(c^2 + 2\right) \geq 9\left(ab + bc + ca\right)$$

ចំលើយ

បន្ទាប់ពីពន្លាត វិសមភាពទៅជា

$$8 + \left(abc\right)^2 + 2\sum_{\text{cyclic}} a^2b^2 + 4\sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 9\sum_{\text{cyclic}} ab$$

តាមវិសមភាព $\left(ab - 1\right)^2 + \left(bc - 1\right)^2 + \left(ca - 1\right)^2 \geq 0$ យើងទាញបាន

$$6 + 2\sum_{\text{cyclic}} a^2b^2 \geq 4\sum_{\text{cyclic}} ab$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2 + \left(abc\right)^2 + 4\sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 5\sum_{\text{cyclic}} ab$$

ដោយ $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 3\left(ab + bc + ca\right)$ នោះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2 + \left(abc\right)^2 + \sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 2 \sum_{\text{cyclic}} ab$$

ពិតតាមវិសមភាពក្នុងលំហាត់ខាងលើ ករណី $t = 1$។
(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៤)

លំហាត់ 85

(អន្តរជាតិ ១៩៨៤)

តាង x, y, z ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $x + y + z = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

ចំលើយ

យើងបំលែងវិសមភាពទៅជាអូម៉ូសែន ដោយ

$$0 \leq \left(xy + yz + zx\right)\left(x + y + z\right) - 2xyz \leq \frac{7}{27}\left(x + y + z\right)^3$$

វិសមភាពខាងឆ្វេងសមមូលនឹង

$$0 \leq xyz + \sum_{\text{sym}} x^2 y \quad \text{ពិត}$$

វិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង

$$7 \sum_{\text{cyclic}} x^3 + 15xyz - 6 \sum_{\text{sym}} x^2 y \geq 0$$

ដោយ

$$7 \sum_{\text{cyclic}} x^3 + 15xyz - 6 \sum_{\text{sym}} x^2 y$$

$$= \left(2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right) + 5\left(3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right)$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2\sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y \text{ និង } 3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y$$

បានហើយ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} 2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y &= \sum_{\text{cyclic}} \left(x^3 + y^3\right) - \sum_{\text{cyclic}} \left(x^2y + xy^2\right) \\ &= \sum_{\text{cyclic}} \left(x^3 + y^3 - x^2y - xy^2\right) \geq 0 \\ &= \sum_{\text{cyclic}} \left(x^2\left(x-y\right) - y^2\left(x-y\right)\right) \\ &= \sum_{\text{cyclic}} \left(x-y\right)^2\left(x+y\right) \geq 0 \end{aligned}$$

វិសមភាពទី២ សមមូលនឹង

$\sum_{\text{cyclic}} x\left(x-y\right)\left(x-z\right) \geq 0$ ពិត តាមវិសមភាពឈួរករណី $r = 1$។

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៣)

លំហាត់ 86

(អន្តរជាតិ ២000)

តាង a, b, c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

ចំលើយ

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\left(a-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{b}\right)\left(b-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{c}\right)\times$$

$$\times\left(c-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{a}\right)\leq abc$$

ជំនួស $a=x^3,b=y^3,c=z^3$ ដែល $x,y,z>0$

$$\left(x^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{y^3}\right)\left(y^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{z^3}\right)\times$$

$$\times\left(z^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{x^3}\right)\leq x^3y^3z^3$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x^2y-y^2z+z^2x\right)\left(y^2z-z^2x+x^2y\right)\left(z^2x-x^2y+y^2z\right)$$

$$\leq x^3y^3z^3$$

$$\Leftrightarrow\quad 3x^3y^3z^3+\sum_{\text{cyclic}}x^6y^3\geq\sum_{\text{cyclic}}x^4y^4z+\sum_{\text{cyclic}}x^5y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 3\left(x^2y\right)\left(y^2z\right)\left(z^2x\right)+\sum_{\text{cyclic}}\left(x^2y\right)^3\geq\sum_{\text{sym}}\left(x^2y\right)^2\left(y^2z\right)$$

តាង $u=x^2y,v=y^2z,w=z^2x$ ។ យើងមាន $u,v,w>0$

$$\Rightarrow\quad 3uvw+\sum_{\text{cyclic}}u^3\geq\sum_{\text{sym}}u^2v$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{\text{cyclic}}u\left(u-v\right)\left(u-w\right)\geq 0$$ ពិត តាមវិសមភាព ឈ័រ។

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ១)

ទ្រឹស្តីបទ វិសមភាពមួរហ៊ែដ

តាង $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ជាចំនួនពិត ដែល

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0; \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0$$
$$a_1 \geq b_1; \quad a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

ករណីនេះ គេថាស្វ៊ីត (a_1, a_2, a_3) ម៉ាសូរ ស្វ៊ីត (b_1, b_2, b_3)។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z គេមាន

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ក) ករណី $b_1 \geq a_2$

ដោយ $a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1$ និង $a_1 \geq b_1$ នោះ $a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$

$$\Rightarrow \quad \max(a_1, a_2) = a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$$

យើងមាន $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3$ និង $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_1 + a_3 - b_1 = a_3$

$\Rightarrow \quad \max(a_1 + a_2 - b_1, a_3) \geq \max(b_2, b_3)$។ តាមទ្រឹស្តីបទ ៥.១.១ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} z^{a_3} \left(x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1} \right) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} z^{a_3} \left(x^{a_1 + a_2 - b_1} y^{b_1} + x^{b_1} y^{a_1 + a_2 - b_1} \right) \\
&= \sum_{\text{cyclic}} x^{b_1} \left(y^{a_1 + a_2 - b_1} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_1 + a_2 - b_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{b_1}\left(y^{b_2}z^{b_3} + y^{b_3}z^{b_2}\right)$$
$$= \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$$

១) ករណី $b_1 \leq a_2$

ដោយ $3b_1 \geq b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + a_2 + a_3$ នោះ

$$b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$$
$$a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$$

ដូច្នេះ

$$\max\left(a_2, a_3\right) \geq \max\left(b_1, a_2 + a_3 - b_1\right)$$
$$\max\left(a_1, a_2 + a_3 - b_1\right) \geq \max\left(b_2, b_3\right)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ៥.១.១ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}\left(y^{a_2}z^{a_3} + y^{a_3}z^{a_2}\right)\\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}\left(y^{b_1}z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1}z^{b_1}\right)\\
&= \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{a_1}z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1}z^{a_1}\right)\\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{b_2}z^{b_3} + x^{b_3}z^{b_2}\right)\\
&= \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}
\end{aligned}$$

សមភាពកើតមាន ទាល់តែ និង មានតែ $x = y = z$ ។

លំហាត់ 87

(វិសមភាពនៃសប៊ឺត)

គេអោយ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

ចំលើយ

វិសមភាពនេះសមមូលនឹង

$$2 \sum_{\text{cyclic}} a\left(a+b\right)\left(a+c\right) \geq 3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\text{sym}} a^3 \geq \sum_{\text{sym}} a^2 b$$

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ២)

លំហាត់ 88

គេអោយ a, b, c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

ចំលើយ

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\frac{1}{a+b+\left(abc\right)^{1/3}}+\frac{1}{b+c+\left(abc\right)^{1/3}}+\frac{1}{c+a+\left(abc\right)^{1/3}} \leq \frac{1}{\left(abc\right)^{1/3}}$$

តាង $a=x^3, b=y^3, c=z^3$ ដែល $x,y,z>0$ ។ វិសមភាពទៅជា

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{1}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow\quad xyz\sum_{\text{cyclic}}\left(x^3+y^3+xyz\right)\left(y^3+z^3+xyz\right)$$

$$\le\left(x^3+y^3+xyz\right)\left(y^3+z^3+xyz\right)\left(z^3+x^3+xyz\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{\text{sym}}x^6y^3\ge\sum_{\text{sym}}x^5y^2z^2$$ ពិតតាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ។

លំហាត់ 89

គេអោយ $a,b,c,d>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{3}{2}\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge$$

$$ab\sqrt{cd}+ac\sqrt{bd}+ad\sqrt{bc}+bc\sqrt{da}+bd\sqrt{ca}+cd\sqrt{ab}$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\sum_{\text{sym}}a^3=6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)$$

$$\sum_{\text{sym}}ab\sqrt{cd}=4\left(ab\sqrt{cd}+ac\sqrt{bd}+ad\sqrt{bc}+bc\sqrt{da}+bd\sqrt{ca}+cd\sqrt{ab}\right)$$

ដូច្នេះវិសមភាព សមមូលនឹង $\sum_{\text{sym}}a^3\ge\sum_{\text{sym}}ab\sqrt{cd}$ រឺ

$$\sum_{\text{sym}}\left(a^3b^0c^0d^0\right)\ge\sum_{\text{sym}}a^1b^1c^{1/2}d^{1/2}$$

ពិត តាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ ព្រោះ $(3,0,0,0)$ ម៉ាស្ទរ $\left(1,1,1/2,1/2\right)$។

លំហាត់ 90

(អាមេរិច ១៩៩៧)

គេអោយ $a,b,c>0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

ចំលើយ

វិសមភាពនេះសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}\left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)abc$$

$$\le 2\left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)\left(c^3+a^3+abc\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{\text{sym}}\left(a^7bc+3a^4b^4c+4a^5b^2c^2+a^3b^3c^3\right)$$

$$\le\sum_{\text{sym}}\left(a^3b^3c^3+2a^6b^3+3a^4b^4c+a^7bc+2a^5b^2c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{\text{sym}}\left(2a^6b^3-2a^5b^2c^2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{\text{sym}}a^6b^3c^0\ge\sum_{\text{sym}}a^5b^2c^2$$

ពិតតាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ ព្រោះ $(6,3,0)$ ម៉ាស្ទរ $(5,2,2)$។

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ១)

លំហាត់ 91

(អន្តរជាតិ ១៩៩៥)

តាង a, b, c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3\left(b+c\right)}+\frac{1}{b^3\left(c+a\right)}+\frac{1}{c^3\left(a+b\right)}\geq\frac{3}{2}$$

ចំលើយ

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{1}{a^3\left(b+c\right)}+\frac{1}{b^3\left(c+a\right)}+\frac{1}{c^3\left(a+b\right)}\geq\frac{3}{2\left(abc\right)^{4/3}}$$

តាង $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ ដែល $x, y, z > 0$ នោះ

$$\sum_{\text{cyclic}}\frac{1}{x^9\left(y^3+z^3\right)}\geq\frac{3}{2x^4y^4z^4}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{\text{sym}}x^{12}y^{12}+2\sum_{\text{sym}}x^{12}y^9z^3+\sum_{\text{sym}}x^9y^9z^6 \geq 3\sum_{\text{sym}}x^{11}y^8z^5+6x^8y^8z^8$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\sum_{\text{sym}}x^{12}y^{12}-\sum_{\text{sym}}x^{11}y^8z^5\right)+2\left(\sum_{\text{sym}}x^{12}y^9z^3-\sum_{\text{sym}}x^{11}y^8z^5\right)+\left(\sum_{\text{sym}}x^9y^9z^6-\sum_{\text{sym}}x^8y^8z^8\right)\geq 0$$

តួនិមួយៗនៅអង្គខាងឆ្វេងសុទ្ធតែមិនអវិជ្ជមាន តាមវិសមភាពម្យួរហ៊ែដ។

(ចូរអានដំនោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៣)

លំហាត់ 92

(អ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៦)

តាង x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(xy+yz+zx\right)\left(\frac{1}{\left(x+y\right)^2}+\frac{1}{\left(y+z\right)^2}+\frac{1}{\left(z+x\right)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

ចំលើយ

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$4\sum_{\text{sym}}x^5y+2\sum_{\text{cyclic}}x^4yz+6x^2y^2z^2-\sum_{\text{sym}}x^4y^2-6\sum_{\text{cyclic}}x^3y^3$$
$$-2\sum_{\text{sym}}x^3y^2z\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\sum_{\text{sym}}x^5y-\sum_{\text{sym}}x^4y^2\right)+3\left(\sum_{\text{sym}}x^5y-\sum_{\text{sym}}x^3y^3\right)$$
$$+2xyz\left(3xyz+\sum_{\text{cyclic}}x^3-\sum_{\text{sym}}x^2y\right)\geq 0$$

តាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ និង ឈ័រ អង្គខាងឆ្វេងជាផលបូកនៃតួមិនអវិជ្ជមាន។

លំហាត់ 93

តាង x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $xy+yz+zx=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{5}{2}$$

ចំលើយ

ដោយ $xy+yz+zx=1$ យើងអូម៉ូសែនូបនីយកម្មវិសមភាពខាងលើទៅជា

$$
\begin{aligned}
&(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)^2 \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2\\
\Leftrightarrow\quad & 4\sum_{\text{sym}} x^5y+\sum_{\text{sym}} x^4yz+14\sum_{\text{sym}} x^3y^2z+38x^2y^2z^2 \geq \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \sum_{\text{sym}} x^4y^2+3\sum_{\text{sym}} x^3y^3\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\sum_{\text{sym}} x^5y-\sum_{\text{sym}} x^4y^2\right)+3\left(\sum_{\text{sym}} x^5y-\sum_{\text{sym}} x^3y^3\right)+\\
&\qquad\qquad xyz\left(\sum_{\text{sym}} x^3+14\sum_{\text{sym}} x^2y+38xyz\right)\geq 0
\end{aligned}
$$

តាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ វិសមភាពខាងលើពិត។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ $x=y,z=0$ រឺ $y=z,x=0$ រឺ $z=x,y=0$ ។ តែដោយ $xy+yz+zx=1$ នោះ វាស្មើគ្នាពេល $(x,y,z)=(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$ ។

៥.២ ន័រម៉ាល្ងូបនីកម្ម

នៅក្នុងមុន យើងបំលែងវិសមភាពមិនអូម៉ូសែនជាវិសមភាពអូម៉ូសែន។ ម៉្យាងវិញទៀត វិសមភាពអូម៉ូសែន អាចធ្វើអោយន័រម៉ាល់ តាមរបៀបច្រើនយ៉ាង។

ន័រម៉ាល់អញ្ញាត (x,y,z) មានន័យថា តម្រូវពី លក្ខខណ្ឌ $x+y+z$ មានតំលៃយ៉ាងម៉េចក៏បាន កែមកជា $x+y+z=\lambda$ ចំនួនថេរមួយ ជាទូទៅគេច្រើនយក $\lambda=1$។

លំហាត់ 94

(អន្តរជាតិ ២០០១)

តាង a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

ចំលើយ

<u>វិធីទី១</u>

យើងជំនួស

$$x=\frac{a}{a+b+c}, y=\frac{b}{a+b+c}, z=\frac{c}{a+b+c}$$

វិសមភាពទៅជា

$$xf\left(x^2+8yz\right)+yf\left(y^2+8zx\right)+zf\left(z^2+8xy\right)\geq 1$$

ដែល $f\left(t\right)=1\big/\sqrt{t}$ ។ ត្រង់នេះ យើងន័រម៉ាល់វិសមភាពដោយ $x+y+z=1$ ។

ដោយ f ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ហើយ $x+y+z=1$ នោះដោយប្រើវិសមភាព

យិនសិន យើងទាញបាន

$$xf\left(x^2+8yz\right)+yf\left(y^2+8zx\right)+zf\left(z^2+8xy\right)\geq$$

$$f\left(x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right)\right)$$

យើងមាន $f\left(1\right)=1$ ។ ដោយអនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាត នោះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$1\geq x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right)$$

ដោយ $x+y+z=1$ នោះ យើងធ្វើអោយវិសមភាពនេះអូម៉ូសែន ជា

$$\left(x+y+z\right)^3\geq$$

$$x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3\left[x\left(y-z\right)^2+y\left(z-x\right)^2+z\left(x-y\right)^2\right]\geq 0 \text{ ពិត។}$$

<u>**វិធីទី២**</u>

ពេលនេះ យើងន័រម៉ាល់វិសមភាពដោយ $xyz=1$ ម្តង។

តាង $x=\dfrac{bc}{a^2}, y=\dfrac{ca}{b^2}, z=\dfrac{ab}{c^2}$ នោះ $xyz=1$។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{\text{cyclic}}\sqrt{\left(1+8x\right)\left(1+8y\right)}\geq\sqrt{\left(1+8x\right)\left(1+8y\right)\left(1+8z\right)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 8\left(x+y+z\right)+2\sqrt{\left(1+8x\right)\left(1+8y\right)\left(1+8z\right)}\sum_{\text{cyclic}}\sqrt{1+8x}$$

$$\geq 510 \text{ (*)}$$

ដោយ $xyz=1$ នោះតាមវិសមភាពកូស៊ី

$$x+y+z\geq 3$$

$$\left(1+8x\right)\left(1+8y\right)\left(1+8z\right)\geq 9x^{8/9}.9y^{8/9}.9z^{8/9}=729$$

$$\sum_{\text{cyclic}}\sqrt{1+8x}\geq\sum_{\text{cyclic}}\sqrt{9x^{8/9}}\geq 9\left(xyz\right)^{4/27}=9$$

$\Rightarrow$ (*) ពិត។

(ចូរអានដំណោះស្រាយតាមវិធីផ្សេងទៀតក្នុងជំពូក ៣)

លំហាត់ 95

(អន្តរជាតិ ១៩៨៣)

តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2b\left(a-b\right)+b^2c\left(b-c\right)+c^2a\left(c-a\right)\geq 0$$

ចំលើយ

ដំនោះស្រាយទី១

តាង $a=y+z, b=z+x, c=x+y$ ។

$$a+b>c \quad\Leftrightarrow\quad y+z+z+x>x+y \Leftrightarrow z>0$$

ដូចគ្នា $x,y,z>0$ ។

វិសមភាពខាងលើសមមូលនឹង

$$x^3z+y^3x+z^3y\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$$

ដោយវិសមភាពខាងលើអូម៉ូសែន នោះយើងអាចសន្មតថា $x+y+z=1$ ។ ដូច្នេះ

$$yf\left(\frac{x}{y}\right)+zf\left(\frac{y}{z}\right)+xf\left(\frac{z}{x}\right)\geq 1$$

ដែល $f\left(t\right)=t^2$ ។ ដោយ f ផតលើ $\mathbb{R}$ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$yf\left(\frac{x}{y}\right)+zf\left(\frac{y}{z}\right)+xf\left(\frac{z}{x}\right)\geq f\left(y.\frac{x}{y}+z.\frac{y}{z}+x.\frac{z}{x}\right)=f\left(1\right)=1$$

ដំនោះស្រាយទី២

តាង $f\left(a,b,c\right)=a^2b\left(a-b\right)+b^2c\left(b-c\right)+c^2a\left(c-a\right)$ ។

យើងឃើញថា f មិនប្រែប្រួលទេ ពេលយើងធ្វើចំលាស់ស៊ីគ្លិចនៃ $\left(a,b,c\right)$ មានន័យថា ដូរ $\left(a,b,c\right)$ ជា $\left(b,c,a\right)$ ជា $\left(c,a,b\right)$។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a=\max\left(a,b,c\right)$ (តែមិនអាចសន្មតថា $a\ge b\ge c$ បានទេ ព្រោះ f មិនស៊ីមេទ្រី)។

យើងមាន

$$f\left(a,b,c\right)=a\left(b-c\right)^2\left(b+c-a\right)$$
$$+b\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(a+b-c\right)\ge 0$$

សមភាពកើតមានពេល $a=b=c$។

លំហាត់ 96

ចំពោះគ្រប់ $a,b,c>0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}$$
$$\ge abc+\sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$$

ចំលើយ

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង abc យើងទាញបាន

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

តាង $x=a/b, y=b/c, z=c/a \Rightarrow xyz=1$។ ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\sqrt{\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+xyz}\ge 1+\sqrt[3]{\frac{\left(x+z\right)\left(y+x\right)\left(z+y\right)}{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)+1} \geq 1+\sqrt[3]{(x+z)(y+x)(z+y)}$$

តាង $p=\sqrt[3]{(x+z)(y+x)(z+y)}$ ។ វិសមភាពទៅជា

$$\sqrt{p^3+1} \geq 1+p$$

យើងមាន

$$p \geq \sqrt[3]{2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}} = 2$$

$$\left(p^3+1\right)-(1+p)^2 = p(p+1)(p-2) \geq 0$$

លំហាត់ 97

(ស្មើទៅការប្រលងសិស្សពូកែអន្តរជាតិ ១៩៩០)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c យើងមាន

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)$$
$$\geq (ab+bc+ca)^3$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)$$
$$=\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^3b^3+\frac{1}{2}a^2b^2c^2+\frac{1}{2}a^4bc+2a^3b^2c+a^4b^2\right)$$

ហើយ

$$(ab+bc+ca)^3 = \sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^3b^3+a^2b^2c^2+3a^3b^2c\right)$$

ដូច្នេះ

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)-\left(ab+bc+ca\right)^3$$
$$=\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^4bc+a^4b^2-\frac{1}{2}a^2b^2c^2-a^3b^2c\right)$$

តែថា ស៊ីត $\left(4,2,0\right)$ និង $\left(4,1,1\right)$ ម៉ាស្សរ ស៊ីត $\left(2,2,2\right)$ និង $\left(3,2,1\right)$ ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពម្សរប៉ោដ

$$\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^4bc+a^4b^2-\frac{1}{2}a^2b^2c^2-a^3b^2c\right)\geq 0$$

លំហាត់ 98

គេអោយ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

ក) $$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

ខ) $$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c$$

ចំលើយ

ក) យើងមាន

$$\frac{1}{a}-\frac{b+c}{a^2+bc}=\frac{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}{a\left(a^2+bc\right)}$$
$$\frac{1}{b}-\frac{c+a}{b^2+ca}=\frac{\left(b-c\right)\left(b-a\right)}{b\left(b^2+ca\right)}$$
$$\frac{1}{c}-\frac{a+b}{c^2+ab}=\frac{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}{c\left(c^2+ab\right)}$$

ដូច្នេះវិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}+\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}\geq 0 \quad (*)$$

វិសមភាពខាងលើស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a,b,c ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a\leq b\leq c$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}\geq 0$$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $c=a$ រឺ $c=b$ ។

បន្ទាប់មកទៀត

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}+\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}$$

$$=\frac{(b-a)^2(a+b)}{ab(a^2+bc)(b^2+ca)}\left[a(c-b)+cb\right]\geq 0$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b$ ។

ដូច្នេះវិសមភាព(*) ពិត ដោយ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b=c$ ។

១) តាមវិសមភាពឈើរ ចំពោះ $r=-1$ និង តាង $x=a+b,y=b+c$ និង $z=c+a$ យើងទាញបាន

$$0\leq \frac{1}{x}(x-y)(x-z)+\frac{1}{y}(y-z)(y-x)+\frac{1}{z}(z-x)(z-y)$$

$$=\frac{(a-c)(b-c)}{a+b}+\frac{(b-a)(c-a)}{b+c}+\frac{(c-b)(a-b)}{c+a}$$

$$=\frac{c^2+ab}{a+b}-c+\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{c^2+ab}{a+b}+\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}\geq a+b+c$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x = y = z$ រឺ $a = b = c$ ។

លំហាត់ 99
(អ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៦)

គេអោយ $x, y, z > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}&(xy + yz + zx)\Big[(x+y)^2(y+z)^2 + (y+z)^2(z+x)^2\\&+(z+x)^2(x+y)^2\Big]\\&= \sum_{\text{sym}}\left(x^5y + 2x^4y^2 + \frac{5}{2}x^4yz + \frac{3}{2}x^3y^3 + 13x^3y^2z + 4x^2y^2z^2\right)\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}&(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\\&= \sum_{\text{sym}}\left(x^4y^2 + x^4yz + x^3y^3 + 6x^3y^2z + \frac{5}{3}x^2y^2z^2\right)\end{aligned}$$

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}\left(4x^5y + x^4yz + x^2y^2z^2 - x^4y^2 - 3x^3y^3 - 2x^3y^2z\right) \geq 0 \quad (1)$$

តែស៊ុីត $(5,1,0)$ ម៉ាស្ទ័រ ស៊ុីត$(4,2,0)$ និង ស៊ុីត $(3,3,0)$ ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}\left(4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3\right) \geq 0 \qquad (2)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត តាមវិសមភាពស៊ើរ យើងមាន

$$\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xyz - x^2y\right) \geq 0$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2xyz$ វិសមភាពនេះទៅជា

$$\sum_{\text{sym}}\left(x^4yz + x^2y^2z^2 - 2x^3y^2z\right) \geq 0 \qquad (3)$$

បូក(២) និង (៣) យើងទាញបាន (១)ពិត។ សមភាពកើតមានពេល $x = y = z$ ។

លំហាត់ 100

(ជប៉ុន ១៩៩៧)

គេអោយ $a, b, c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&(b+c-a)^2\left[(c+a)^2+b^2\right]\left[(a+b)^2+c^2\right] + \\
&\qquad (c+a-b)^2\left[(b+c)^2+a^2\right]\left[(a+b)^2+c^2\right] + \\
&\qquad (a+b-c)^2\left[(b+c)^2+a^2\right]\left[(c+a)^2+b^2\right]
\end{aligned}$$

$$=\sum_{\text{sym}}\left(\frac{3}{2}a^6+2a^5b+a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3+3a^2b^2c^2\right)$$

$$\left[\left(b+c\right)^2+a^2\right]\left[\left(c+a\right)^2+b^2\right]\left[\left(a+b\right)^2+c^2\right]$$

$$=\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^6+2a^5b+3a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3+8a^3b^2c+\frac{7}{3}a^2b^2c^2\right)$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}\left(3a^6+2a^5b-2a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3-12a^3b^2c+4a^2b^2c^2\right)\geq 0 \tag{1}$$

តែតាមវិសមភាពឈ័រ

$$\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}abc-a^2b\right)\geq 0 \tag{2}$$

ដោយគុណអង្គនិមួយៗនៃ(2) នឹង $4abc$ យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}}\left(4a^4bc-8a^3b^2a+4a^2b^2c^2\right)\geq 0 \tag{3}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\sum_{\text{sym}}\left(3a^6+2a^5b-2a^4b^2-a^4bc+2a^3b^3-4a^3b^2c\right)\geq 0 \tag{4}$$

តែស៊ីត $\left(6,0,0\right)$ ម៉ាស្ទូរ ស៊ីត$\left(4,1,1\right)$ និង ស៊ីត $\left(3,2,1\right)$ ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}\left(3a^6-a^4bc-2a^3b^2c\right)\geq 0 \tag{5}$$

បន្ទាប់មកទៀតស៊ីត $\left(5,1,0\right)$ ម៉ាស្ទូរ ស៊ីត$\left(4,2,0\right)$ ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}\left(2a^5b-2a^4b^2\right)\geq 0 \tag{6}$$

ហើយជាចុងក្រោយ ស៊ីត $\left(3,3,0\right)$ ម៉ាស្ទូរ ស៊ីត$\left(3,2,1\right)$ ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}} \left(2a^3b^3 - 2a^3b^2c\right) \geq 0 \qquad (6)$$

ដោយបូក (5), (6) និង (7) យើងទាញបាន (4)។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ $a = b = c$ ។

៦

វិសមភាពជរណីមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ ៦.១

ចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន p,q ដែល $p+q=1$ គេមាន $pa+qb \geq a^p b^q$ ចំពោះគ្រប់ $a,b>0$។

សំរាយបញ្ជាក់

យក $p=\dfrac{m}{m+n}$ និង $q=\dfrac{n}{m+n}$ ដែល m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{ma+nb}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{a^m b^n}$$ ពិត តាមវិសមភាពកូស៊ី។

ទ្រឹស្តីបទ ៦.២

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន p,q ដែល $p+q=1$ គេមាន $px+qy \geq x^p y^q$ ចំពោះគ្រប់ $x,y>0$។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងជ្រើសរើសស្ទីតនៃចំនួនសនិទាន $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ដែល $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$ ។

តាង $b_i = 1 - a_i$ យើងទាញបាន $\lim_{n\to\infty} b_n = q$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ យើងទាញបាន

$$a_n x + b_n y \geq x^{n_n} y^{b_n}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n x + b_n y \geq \lim_{n\to\infty} x^{n_n} y^{b_n}$$

$$\Rightarrow \quad px + qy \geq x^p y^q$$

ទ្រឹស្តីបទ ៦.៣ មធ្យមនពន្ត-ធរណីមាត្រមានមេគុណ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$ ដែល $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ គេមាន

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាមវិសមភាពយិនសិន យើងមាន

$$\begin{aligned} \ln\left(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\right) &\geq \alpha_1 \ln\left(x_1\right) + \cdots + \alpha_n \ln\left(x_n\right) \\ &= \ln\left(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\right) \end{aligned}$$

ទ្រឹស្តីបទ ៦.៤ វិសមភាពហូលឌ័រ

គេអោយ $p, q \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ និង បណ្តាចំនួនពិត $a_1, a_2, \cdots, a_n$ និង $b_1, b_2, \cdots, b_n$ នោះ

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$$

ដែលអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\left(a_1^p, a_2^p, \cdots, a_n^p\right)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{v}\left(b_1^p, b_2^p, \cdots, b_n^p\right)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ហើយ បណ្តា $a_i b_i$ សុទ្ធតែវិជ្ជមានរឺសូន្យទាំងអស់ រឺបើមិនអញ្ចឹង សុទ្ធតែអវិជ្ជមានរឺសូន្យទាំងអស់។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $u = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}; v = \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$ ។ ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$\frac{a_i}{u} \times \frac{b_i}{v} \le \frac{1}{p}\left(\frac{a_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b_i}{v}\right)^p$$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាពខាងលើ រួចហើយគុណនឹង uv យើងទាញបានវិសមភាពហូលឌ័រ។

សំគាល់

បើ $p = q = 2$ វិសមភាពនេះ ក្លាយជាវិសមភាពកូស៊ី-ស្វ័ស

ទ្រឹស្តីបទ ៦.៥ វិសមភាពមិនកូវស្គី

តាង $p \in \left[1;+\infty\right[$ ហើយ $x_1,\cdots,x_n$ និង $y_1,\cdots,y_n$ ជាចំនួនពិត។ គេមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}$$

ដែលអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\left(a_1^p,a_2^p,\cdots,a_n^p\right)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{v}\left(b_1^p,b_2^p,\cdots,b_n^p\right)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ហើយមានទិសដៅដូចគ្នា។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $q>0$ ដែល $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \Rightarrow \left(p-1\right)q=p$ ។ ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$\begin{aligned}\left|x_i+y_i\right|^p &= \left|x_i+y_i\right|^{p-1}\times\left|x_i+y_i\right| \\ &\le \left|x_i\right|\left|x_i+y_i\right|^{p-1}+\left|y_i\right|\left|x_i+y_i\right|^{p-1}\end{aligned}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^p \le \sum_{i=1}^{n}\left(\left|x_i\right|\left|x_i+y_i\right|^{p-1}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\left|y_i\right|\left|x_i+y_i\right|^{p-1}\right)$$

តាមវិសមភាពហូលឌ័រ យើងមាន

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left(\left|x_i\right|\left|x_i+y_i\right|^{p-1}\right) \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^{\left(p-1\right)q}\right)^{1/q}\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^p\right)^{1/q}$$

ដូចគ្នា

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left|y_i\right|\left|x_i+y_i\right|^{p-1}\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^p\right)^{1/q}$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^p$$

$$\le \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^p\right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^p\right)^{1-1/q} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}$$

លំហាត់ 101

គេអោយ $x, y, z > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^{4/3}}{x^{4/3} + \left(x^2 + y^2\right)^{1/3} \left(x + z\right)^{2/3}} + \frac{y^{4/3}}{y^{4/3} + \left(y^2 + z^2\right)^{1/3} \left(y + x\right)^{2/3}}$$
$$+ \frac{z^{4/3}}{z^{4/3} + \left(z^2 + x^2\right)^{1/3} \left(z + y\right)^{2/3}} \leq 1$$

ចំលើយ

តាង

$$S = \frac{x^{4/3}}{x^{4/3} + \left(x^2 + y^2\right)^{1/3} \left(x + z\right)^{2/3}} + \frac{y^{4/3}}{y^{4/3} + \left(y^2 + z^2\right)^{1/3} \left(y + x\right)^{2/3}}$$
$$+ \frac{z^{4/3}}{z^{4/3} + \left(z^2 + x^2\right)^{1/3} \left(z + y\right)^{2/3}}$$

$$x = a^3, y = b^3, z = c^3$$

តាមវិសមភាព ហ្វូលឌ័រ យើងមាន

$$\left(x^2 + y^2\right)^{1/3} \left(x + z\right)^{2/3}$$
$$= \left[\left(a^2\right)^3 + \left(b^2\right)^3\right]^{1/3} \left[\left(c^2\right)^{3/2} + \left(a^2\right)^{3/2}\right]^{2/3}$$
$$\geq a^2 c^2 + b^2 a^2$$
$$= \left(xy\right)^{2/3} + \left(xz\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^{4/3}}{x^{4/3}+\left(x^2+y^2\right)^{1/3}\left(x+z\right)^{2/3}} \le \frac{x^{4/3}}{x^{4/3}+\left(xy\right)^{2/3}+\left(xz\right)^{2/3}}$$

$$= \frac{x^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា បន្ទាប់មកបូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាពបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $S \le 1$ ។

លំហាត់ 102

គេអោយចំនួនពិត a,b,c,d ។ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតរបស់

$$S = \sqrt{\left(a+1\right)^2+2\left(b-2\right)^2+\left(c+3\right)^2}$$
$$+\sqrt{\left(b+1\right)^2+2\left(c-2\right)^2+\left(d+3\right)^2}$$
$$+\sqrt{\left(c+1\right)^2+2\left(d-2\right)^2+\left(a+3\right)^2}$$
$$+\sqrt{\left(d+1\right)^2+2\left(a-2\right)^2+\left(b+3\right)^2}$$

ចំលើយ

យើងមាន $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ។ តាង $s = a+b+c+d$ ។ តាមវិសមភាពមិនកូវស្គី

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\left(a+1\right)^2+2\left(b-2\right)^2+\left(c+3\right)^2} \\ &\quad +\sqrt{\left(b+1\right)^2+2\left(c-2\right)^2+\left(d+3\right)^2} \\ &\ge \sqrt{\left(a+b+2\right)^2+2\left(b+c-4\right)^2+\left(c+d+6\right)^2} \\ S_2 &= \sqrt{\left(c+1\right)^2+2\left(d-2\right)^2+\left(a+3\right)^2} \\ &\quad +\sqrt{\left(d+1\right)^2+2\left(a-2\right)^2+\left(b+3\right)^2} \end{aligned}$$

$$\geq \sqrt{\left(c+d+2\right)^2+2\left(d+a-4\right)^2+\left(a+b+6\right)^2}$$

$$S=S_1+S_2\geq \sqrt{\left(s+4\right)^2+2\left(s-8\right)^2+\left(s+12\right)^2}$$

$$=\sqrt{4s^2+288}\geq \sqrt{288}=12\sqrt{2}$$

ចំពោះ $a=b=c=d=0$ យើងមាន $S=12\sqrt{2}$ ។ ដូច្នេះតំលៃតូចបំផុតរបស់ S គឺ $12\sqrt{2}$ ។

ឯកសារដើម

សៀវភៅនេះដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅខាងក្រោមនេះ

១) *ព្យែរ បោនស្តិន* - វិសមភាព, តុលា ២00១

២) *ហូចូ លី* - វិសមភាព - ទ្រឹស្តី និង តិចនិច,