គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច

ភាគ១- នព្វន្ត

នព្វន្តជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យា ដែលតែងចេញក្នុងការប្រលងសិស្សពូកែនានាដោយស្ទើរតែរាល់លើក ហើយក៏ជាផ្នែកដែលពិបាកដែរ។ សៀវភៅនេះ មានមេរៀនសង្ខេបខ្លះៗ ទ្រឹស្តីបទនិងលំហាត់អនុវត្តន៍ល្អៗ ៦៣៥លំហាត់ ដកស្រង់ចេញពីការប្រលងសិស្សពូកែនៅប្រទេសនានាលើពិភពលោក។

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ
អនុបណ្ឌិតឯកទេសសំណង់ស៊ីវិល។ សាស្ត្រាចារ្យសំណង់ស៊ីវិល, វិទ្យាស្ថានបច្ចេកវិទ្យាកម្ពុជា។
មេដាយមាសគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទុតិយភូមិ, កម្ពុជា ឆ្នាំ១៩៩៧។

គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច

ភាគ១-នព្វន្ត

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច

ភាគ១- នព្វន្ត

សំរាប់ត្រៀមប្រលងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ជាតិ និង អន្តរជាតិ

គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច

ភាគ១ - ចំនួន

ភ្នំពេញ ១ មករា ២០០៨

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ
អាសយដ្ឋានទំនាក់ទំនង
វិទ្យាស្ថានបច្ចេកវិទ្យាកម្ពុជា,
ដេប៉ាតឺម៉ង់ទេពកោសល្យស៊ីវិល
ប្រអប់សំបុត្រ ៨៦,មហាវិថីសហព័ន្ធរុស្ស៊ី,
១២១៥៦, ភ្នំពេញ
អ៊ីមែល : LSVICHET@YAHOO.COM

1. បើ a ជាចំនួនគត់ នោះ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 បើ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 និងច្រាសមកវិញ។

ចំលើយ

ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា បើ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ a ចែកមិនដាច់នឹង 3។ ឧបមាថា 3 ចែកដាច់ $a^2-1=(a-1)(a+1)$

ដោយ 3 ជាចំនួនបឋម នោះ $a-1$ រឺ $a+1$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង៣។ ក្នុងករណីទាំងពីរ a ត្រូវតែចែកមិនដាច់នឹង3។ ដូច្នេះ បើ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ a ចែកមិនដាច់នឹង 3។

ច្រាសមកវិញ យើងបង្ហាញថា បើ a ចែកមិនដាច់នឹង៣ នោះ a^2-1 ចែកដាច់នឹង៣។
ដោយ a ចែកមិនដាច់នឹង ៣ នោះ យើងអាចតាង

$a=3q+r$ ដែល $r=1$ រឺ 2

បើ $r=1$ នោះ $(a-1)(a+1)=(3q)(3q+2)$ ចែកដាច់នឹង ៣

បើ $r=2$ នោះ $(a-1)(a+1)=(3q+1)(3q+3)$ ចែកដាច់នឹង ៣។

ដូច្នេះ បើ a ចែកមិនដាច់នឹង៣ នោះ a^2-1 ចែកដាច់នឹង៣។

2. ចូរបង្ហាញថា សមីការ $x^2 - y^2 = 1$ គ្មានរឹសជាចំនួនគត់វិជ្ជមានទេ។

ចំលើយ

សន្មតផ្ទុយទៅវិញថា សមីការមានរឹសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ដូច្នេះ $(x-y)(x+y)=1 \Rightarrow$ $x-y=-1$ និង $x+y=-1$ រឺក៏ $x-y=1$ និង $x+y=1$។

ករណីទី១យើងទាញបាន $x=-1, y=0$ មិនយកព្រោះ x, y ត្រូវតែជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ករណីទី២ យើងទាញបាន $x=1, y=0$ មិនយកព្រោះ x, y ត្រូវតែជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន($x, y \geq 1$)។

3. បើ x, y ជា២ចំនួនគត់ ដែល $x+y$ គូ នោះ x, y ត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា។

ចំលើយ

យើងនឹងបង្ហាញថា បើ x, y ត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា នោះ $x+y$ សេស។ ដូច្នេះយើងសន្មតថា x, y ត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា។ យើងសន្មតថា x គូ ហើយ y សេស។ ដូច្នេះមានចំនួនគត់ k និង m ដែល $x=2k$ និង $y=2m+1$។ ដូច្នេះ $x+y=2k+2m+1=2(k+m)+1$ ជាចំនួនសេស។

4. ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ចំលើយ

យើងសន្មតថា សំណើខាងលើមិនពិត។ មានន័យថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ a,b ដែល $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ។ ក្នុងចំនួនគត់ដែលអាចមានទាំងនោះ សន្មតថា a,b តូចជាងគេ។

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = b\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = 2b^2$$

$\Rightarrow$ a ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $a = 2m$ ដែល $m < a$ ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ។

$$\Rightarrow \quad 2m^2 = b^2$$

$\Rightarrow$ b ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $b = 2n$ ដែល $n < b$ ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ។

ដូច្នេះ $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$ ដែល $m < a$ និង $n < b$ មានន័យថា (a,b) មិនមែនជាគូតំលៃតូចបំផុតទេ $\Rightarrow$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ មានន័យថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

5. **សន្មតថា a,b,c ជាចំនួនគត់ ដែល $a^6+2b^6=4c^6$។ ចូរបង្ហាញថា** $a=b=c=0$។

ចំលើយ

សន្មតថា សមីការមានចំលើយ វិជ្ជមាន ខុសពីសូន្យ ផ្សេងទៀត ហើយយើងតាង (a,b,c) ជាចំលើយដែលតូចជាងគេ។

$a^6+2b^6=4c^6 \quad \Rightarrow \quad a$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $a=2a_1$។

$2^5a_1^{\ 6}+b^6=2c^6 \quad \Rightarrow \quad b$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $b=2b_1$។

$2^4a_1^{\ 6}+2^5b^6=c^6 \quad \Rightarrow \quad c$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ។ $c=2c_1$។

$a_1^{\ 6}+2b^6=4c_1^{\ 6}$ យើងឃើញថា (a_1,b_1,c_1) ក៏ជាចំលើយរបស់សមីការនេះដែរ ដែល $a_1<a, b_1<b, c_1<c$។ ដូច្នេះ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ ដូច្នេះ សមីការមិនមានចំលើយ ក្រៅពី $a=b=c=0$ ទេ។

6. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៨៨)

បើ a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាចំនួនគត់ នោះ $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាការេនៃចំនួនគត់មួយ។

ចំលើយ

សន្មតថា $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}=k$ ដែល k ជាចំនួនគត់។ យើងត្រូវបង្ហាញថា k ជាចំនួនការេ។
យើងសន្មតថា មានគូ(a,b) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ k ជាចំនួនគត់ ជ្រើសរើសយកa,b ជាគូដែលតូចជាងគេ។
យើងអាចសន្មតថា $a \le b$ ព្រោះ កន្សោមខាងលើ មានលក្ខណៈ ស៊ីមេទ្រី ធៀបនឹង a,b ។

បើ $a=b$ នោះ $$0<k=\frac{2a^2}{1+a^2}<2$$

$\Rightarrow$ បើ k ជាចំនួនគត់ នោះ $k=1=1^2$ ជាចំនួនការេ។

បើ $a<b$ នោះ

$$a^2+b^2-k(ab+1)=0$$

$$b^2-ka.b+a^2-k=0$$

សមីការដឺក្រេទី២ ធៀបនឹង b ដែលមានផលបូករឹសស្មើ ka និងផលគុណរឹសស្មើ a^2-k (តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត)។

តាង $b_1,b_2=b$ ជារឹសរបស់វា ដូច្នេះ $b_1+b=ka$ និង $b_1b=a^2-k$ ។
ដោយ b,ka ជាចំនួនគត់ នោះ b_1 ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ។ យើងមាន a,k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយនិង $b>a\ge 0$ ។ b_1 មិនអាចធំជាងសូន្យបានទេ ព្រោះបើមិនអញ្ចឹងទេ

$$b_1 = \frac{a^2-k}{b} < \frac{b^2-k}{b} < b$$ មានន័យថា មាន b_1 ជាចំនួនគត់

វិជ្ជមាន(តូចជាងរឺធំជាង a ក៏បាន) ដែល $b_1 < b \Rightarrow b$ មិនមែនជាចំនួនគត់ដែល

តូចជាងគេទេ ដែលផ្ទុយពីសន្មតិ។ ដូច្នេះ $b_1 \le 0$ ។ តែ

$$a^2 + {b_1}^2 = k(ab_1+1) \ge 0\,;\; ab_1 + 1 \ge 0\,;\; b_1 \ge -\frac{1}{a}$$

ដូច្នេះ $b_1 \le 0$ និង $b_1 \ge -\frac{1}{a}$ ដែល $a > 0$ ជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះ $b_1 = 0$ ។ នាំអោយ

$k = a^2$ ជាចំនួនការេ។

7. **គណនាចំនួនគត់ $\left(a,b,c\right)$ ដែល $a^3 + 2b^3 = 4c^3$។**

8. **ចូរបង្ហាញថា សមភាព $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ អាចពិតចំពោះបណ្តាចំនួន (x,y,z) តែករណី ដែល $x = y = z = 0$ ប៉ុណ្ណោះ។**

9. **ចូរបង្ហាញថា $3^{3n+3} - 26n - 27$ ជាពហុគុណ នៃ 169 ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។**

ចំលើយ

ករណី $n = 1$ យើងមាន $3^6 - 26 - 27 = 169.4$ ជាពហុគុណ នៃ 169 ពិត។

សន្មតថាវាពិត រហូតដល់ $n-1, n > 1$ មានន័យថា

$$3^{3n} - 26n - 1 = 169N$$ ចំពោះចំនួនគត់ N ណាមួយ។

យើងមាន

$$3^{3n+3} - 26n - 27 = 27.3^{3n} - 26n - 27$$

$$= 27\left(3^{3n} - 26n - 1\right) + 676n$$

$$= 27.169N + 169.4.n$$ ពិត។

ដូច្នេះ $3^{3n+3} - 26n - 27$ ជាពហុគុណ នៃ 169 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

10. **ចូរបង្ហាញថា** $(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}$ **ជាចំនួនគត់គូ ហើយថា** $(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} = b\sqrt{2}$ **ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន** b **និង ចំពោះចំនួនគត់** $n \geq 1$**។**

ចំលើយ

ករណី $n = 1$ $\quad (1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2 = 6$ គត់គូ ពិត

$(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}$ ពិត

សន្មតថាពិត រហូតដល់ $n-1, n > 1$ ដូច្នេះ

$$(1+\sqrt{2})^{2n-2} + (1-\sqrt{2})^{2n-2} = 2N$$

$$(1+\sqrt{2})^{2n-2} - (1-\sqrt{2})^{2n-2} = a\sqrt{2}$$

ដែល N និង a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

យើងមាន

$$(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}$$
$$= (1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^{2n-2} + (1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^{2n-2}$$
$$= (3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2n-2} + (3-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2n-2}$$
$$= 12N + 2\sqrt{2}a\sqrt{2}$$
$$= 12N + 4a$$ ជាចំនួនគត់គូ។

ហើយដូចគ្នា

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}=(3a+4N)\sqrt{2}$$

ដូច្នេះសំណើខាងលើ ពិត ចំពោះ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន b និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$។

11. ចូរបង្ហាញថា បើ k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស នោះ 2^{n+2} ចែកដាច់ $k^{2^n}-1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។

ចំលើយ

ករណី $n=1$ $\quad k^2-1=(k-1)(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 8 ចំពោះគ្រប់ចំនួនធម្មជាតិសេស k ព្រោះ $(k-1)$ និង $(k+1)$ ចែកដាច់នឹង 2 ទាំង២ ហើយមានមួយចែកដាច់នឹង៤។ ព្រោះ បើ $k=2m+1$ នោះ $k-1=2m$; $k+1=2m+2$ ។ បើ m គូ នោះ $k-1$ ចែកដាច់នឹង៤ ហើយ $k+1$ ចែកដាច់នឹង២។ បើ m សេស $k-1$ ចែកដាច់នឹង២ ហើយ $k+1$ ចែកដាច់នឹង៤។

ឧបមាថា សំណើពិតដល់ $n, n>1$ មានន័យថា 2^{n+2} ចែកដាច់ $k^{2^n}-1$ ។ យើងមាន

$$k^{2^{n+1}}-1=\left(k^{2^n}-1\right)\left(k^{2^n}+1\right)$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា $\left(k^{2^n}+1\right)$ ចែកដាច់នឹង ២។ វាពិតព្រោះ k សេស ហើយនាំអោយ $\left(k^{2^n}+1\right)$ គូ។

12. (អាមេរិច ១៩៧៨)

ចំនួនគត់ n គេហៅវាថាជាលេខពិសេស បើគេអាចសរសេរជា

$n = a_1 + a_2 + ... + a_k$

បាន ដោយ $a_1, ..., a_k$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន(មិនចាំបាច់ខុសគ្នាក៏បាន) ដែល

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$$

ដោយដឹងថា ចំនួនគត់ចាប់ពី 33 ដល់ 73 សុទ្ធតែជាលេខពិសេសទាំងអស់

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួន

គត់ទាំងអស់ ដែល ≥ 33 សុទ្ធតែជា លេខពិសេស។

ចំលើយ

តាង $P(n)$ ជាសំណើដែលថា «បណ្តាចំនួនគត់ $n, n+1, ..., 2n+7$ សុទ្ធតែជាលេខពិសេស»។ យើងមាន $P(33)$ ពិត។ យើងនឹងបង្ហាញថា $P(n+1)$ ក៏ពិតដែរ មានន័យថា «បណ្តាចំនួនគត់ $n+1, n+2, ..., 2n+9$ សុទ្ធតែជាលេខពិសេស»។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $2n+8$ និង $2n+9$ ជាលេខពិសេស ជាបន្ថែមទៀតបានហើយ។ យើងនឹងបង្ហាញថា បើ n ជាលេខពិសេស នោះ $2n+8$ និង $2n+9$ ក៏ជាលេខពិសេសដែរ។ យើងមាន

$$n = a_1 + a_2 + ... + a_k \text{ និង } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$$

នោះ $2n + 8 = 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_k + 4 + 4$ និង

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

ដូចគ្នាដែរ $2n + 9 = 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_k + 3 + 6$ និង

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

ដូច្នេះ បើ n ជាលេខពិសេស នោះ $2n+8$ និង $2n+9$ ក៏ជាលេខពិសេសដែរ។

13. ទ្រឹស្តីបទ–(វិសមភាពកូស៊ី)

បើ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន នោះ គេមាន

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត មិនអវិជ្ជមាន គេមាន

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពខាងលើពិត ចំពោះ $n = 2$ ។ សន្មតថា វិសមភាពខាងលើពិត រហូតដល់ $n = 2^{k-1}, k > 2$ ។ ដូច្នេះ

$$\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \ldots a_{2^{k-1}}} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

តាង $$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

$$x_2 = \frac{a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}}{2^{k-1}}$$

យើងមាន $$\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \dfrac{a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2}$$

$$\ge \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right)\left(\frac{a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}}{2^{k-1}}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} \ge \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_{2^k}}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពពិតចំពោះ គ្រប់ $n = 2^k, k \geq 1$ ។

ឥឡូវសន្មតថា $2^{k-1} < n < 2^k$ ។ តាង

$$y_1 = a_1, y_2 = a_2, \ldots, y_n = a_n$$

$$y_{n+1} = y_{n+2} = \ldots = y_{2^k} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

យើងមាន

$$\frac{y_1 + \ldots + y_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{y_1 \ldots y_{2^k}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \left(2^k - n\right)\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{2^k - n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{nA + \left(2^k - n\right)A}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{G^n A^{2^k - n}}$$

$$\Rightarrow \quad A \geq G^{n/2^k} A^{1 - n/2^k}$$

$$\Rightarrow \quad A^{n/2^k} \geq G^{n/2^k}$$

$$\Rightarrow \quad A \geq G$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Augustin Louis Cauchy(1789-1857) ជាគណិតវិទូជាតិបារាំង។ គាត់បានចាប់ផ្តើមសរសេររូបមន្ត និង ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទគណិតវិទ្យាផ្នែកគណនាតាមបែបស៊ីជំរៅ ហើយក្រោយមកក្លាយជាអ្នកត្រួសត្រាយផ្លូវដំបូងនៃគណិតវិភាគ។ គាត់ក៏ជាអ្នកដែលបានសរសេរទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ ទាក់ទងនឹងគណិតវិភាគក្នុងកុំផ្លិច ផងដែរ។

14. **តាង s ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់អង្កត់$[s,2s]$ មានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ ជានិច្ច។**

ចំលើយ

បើ s ជាស្វ័យគុណគោល២ នោះសំណើពិត ដោយមិនចាំបាច់ស្រាយបញ្ជាក់។ បើ s មិនមែនជាស្វ័យគុណគោល២ នោះវាត្រូវនៅចន្លោះ ស្វ័យគុណគោល២ ពីរតរៀងគ្នា មានន័យថា $2^r < s < 2^{r+1}$។ នាំអោយ $2^{r+1} < 2s$ នាំអោយ $s < 2^{r+1} < 2s$ មានន័យថា មានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ នៅចន្លោះ $[s,2s]$(ស្មើនឹង 2^{r+1})។

15. **តាង M ជាសំណុំមិនទទេ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល " បើ x ជាធាតុរបស់ M នោះ $4x$ និង $[\sqrt{x}]$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ "។ ចូរបង្ហាញថា M ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ ក្នុងនេះ $[a]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ a។**

ចំលើយ

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារដោយកំណើន។

ដោយសារ M ជាសំណុំមិនទទេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះM មានធាតុដែលតូចបំផុត តាងដោយ a ។ តាមសម្មតិកម្ម $[\sqrt{a}]$ ជាធាតុរបស់ M តែ $[\sqrt{a}] \leq \sqrt{a} \leq a$ តែ a ជាធាតុតូចជាងគេ ដូច្នេះ ទាល់តែ $a = 1$ ។ មានន័យថា 1 ជាធាតុមួយរបស់ M ។

ដោយ 1 ជាធាតុមួយរបស់ M នោះ 4 ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ ហើយដូចគ្នាដែរ $4.4 = 4^2$ ។ល។ ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលមានរាង $4^n = 2^{2n}, n = 1,2,\ldots$ ជាធាតុរបស់ M ។ បន្ទាប់មកទៀត $\left[\sqrt{2^{2n}}\right] = 2^n$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ មានន័យថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ ដែលជាស្វ័យគុណគោល២ ជាធាតុរបស់ M ។

ឥលូវយើងសន្មតថា មាន$n \in N$ មួយដែលមិនមែនជាធាតុរបស់M ។ ដូច្នេះn មិនមែនជាស្វ័យគុណគោល២ ទេ។ ដោយ $n \notin M$ នោះ គ្មាន ចំនួនគត់ណាមួយ នៅចន្លោះ $A_1 = \left[n^2, (n+1)^2\right)$ ដែលជាធាតុរបស់ M ទេ ព្រោះ គ្រប់ $y \in A_1$ គេមាន $[\sqrt{y}] = n$ ដែល $n \notin M$ ដូច្នេះ $[\sqrt{y}] \notin M$ ដូច្នេះ $y \notin M$ (ព្រោះ បើ $y \notin M$ នោះ $[\sqrt{y}]$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ) ។ ដូចគ្នាដែរ គ្មាន ចំនួនគត់ណាមួយ $z \in A_2$ ដែល $A_2 = \left[n^4, (n+1)^4\right)$ ជាធាតុរបស់ M ទេ ព្រោះ បើមិនអញ្ចឹងទេ នាំអោយ មានធាតុមួយជារបស់ A_1 ដែលជាធាតុរបស់ M ដែរ តែផ្ទុយពីការសន្មត។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន គ្មានធាតុណាមួយ ដែលស្ថិតនៅចន្លោះ $A_r = \left[n^{2^r}, (n+1)^{2^r}\right)$ ជាធាតុរបស់ M ទេ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា ចន្លោះនេះ ធំណាស់ ដែលអាចមានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ ជាធាតុរបស់ M ដែលនាំអោយ វាផ្ទុយនឹងការឧបមាដែលថា គ្មានធាតុរបស់ A_r ដែលជាធាតុរបស់ M ។

អនុគមន៍ $f(x)=\log_2 x$ ជាអនុគមន៍កើន ចំពោះ $x\in R_+$ ។ ដូច្នេះ $\log_2(n+1)-\log_2 n>0$ ។ ដោយអនុគមន៍ $f(x)=2^{-x}$ ជាអនុគមន៍ចុះ លើ R នោះ គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមានធំគ្រប់គ្រាន់ k ណាមួយ ដែល

$$2^{-k}<\log_2(n+1)-\log_2 n$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)^{2^k}>2n^{2^k}$$

$\Rightarrow$ចន្លោះ $\left[n^{2^k},2n^{2^k}\right]$ ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $\left[n^{2^k},(n+1)^{2^k}\right)$ ។ តែគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន s ចន្លោះ $[s,2s]$ សុទ្ធតែមានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ ជានិច្ច។ ដូច្នេះ យើងទាញបានភាពផ្ទុយនឹងការឧបមាដែលយើងចង់បាន៕

16. **ចូរបង្ហាញថា $11^{n+2}+12^{2n+1}$ ចែកដាច់នឹង 133 ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។**

17. **ចូរបង្ហាញថា**

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

ស្មើនឹង $(-1)^n\dfrac{x(x-1)\dots(x-n)}{n!}$ **ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។**

18. **តាង $n\in N$ ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព**

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1}>1$$

19. **ចូរបង្ហាញថា**

$$\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$ (ក្នុងនោះមានឫស n ដង)

ចំពោះ $n \in N$

20. តាង $a_1 = 3, b_1 = 4$ និង $a_n = 3^{a_{n-1}}, b_n = 4^{b_{n-1}}$ បើ $n > 1$។

ចូរបង្ហាញថា $a_{1000} > b_{999}$ ។

21. តាង $n \in N, n > 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

22. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$$1.2 + 2.5 + ... + n.(3n-1) = n^2(n+1)$$

23. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$$

24. ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$

25. ចូរបង្ហាញថា ផលបូកនៃចំនួនគូបវិជ្ជមានពាតរៀងគ្នា ចែកដាច់នឹង ៩។

26. បើ $|x| \neq 1, n \in \mathbb{N}$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+...+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

27. តើពិតរឺទេថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេមាន n^2+n+41 ជាចំនួនបឋម?។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ ថាពិតរឺមិនពិត។

28. ចូរបង្ហាញថា សំណុំមួយមាន n ធាតុ មានសំណុំរងចំនួន 2^n ។

29. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេមាន $\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$ ជាចំនួនគត់។

30. (a) តាង $a_1, a_2, ... a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a_1 a_2 ... a_n = 1$

តាមវិចារដោយកំណើន ចូរបង្ហាញថា $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$

ហើយសមភាព កើតមាន លុះត្រាតែ $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$។

(b) ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ នូវវិសមភាព កូស៊ីឡើងវិញ។

(c) ចូរបង្ហាញថា បើ $n > 1$ នោះ $1.3.5...(2n-1) < n^n$

(d) ចូរបង្ហាញថា បើ $n > 1$ នោះ

$$n\Big((n+1)^{1/n}-1\Big) < 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$$

(e)ចូរបង្ហាញថា បើ $n > 1$ នោះ

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{(n+1)^{1/n}}+\frac{1}{n+1}\right)$$

(f) គេអោយ u,v,w ជាចំនួនវិជ្ជមាន $0 < a \leq 1$ និង $u+v+w=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(\frac{1}{u}-a\right)\left(\frac{1}{v}-a\right)\left(\frac{1}{w}-a\right) \geq 27-27a+9a^2-a^3$$

(g) តាង $y_1, y_2, ..., y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ វិសមភាពមធ្យមអាម៉ូនិច–មធ្យមធរណីមាត្រ ខាងក្រោម

$$\frac{n}{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+...+\frac{1}{y_n}} \leq \sqrt[n]{y_1 y_2 ... y_n}$$

(h) តាង $y_1, y_2, ..., y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ខុសគ្នា២ៗ។ តាង $s = y_1 + y_2 + ... + y_n$

(h1) ចូរបង្ហាញថា

$$(n-1)\sum_{1\leq r\leq n}\frac{1}{s-a_r} < \sum_{1\leq r\leq n}\frac{1}{a_r}$$

(h2) ចូរទាញបង្ហាញថា

$$\frac{4n}{s} < s\sum_{1\leq r\leq n}\frac{1}{a_r(s-a_r)} < \frac{n}{n-1}\sum_{1\leq r\leq n}\frac{1}{a_r}$$

31. តាង $y_1, y_2, ..., y_n$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $y_1 + y_2 + ... + y_n \leq 1/2$។

ចូរបង្ហាញថា $(1-y_1)(1-y_2)...(1-y_n) \geq 1/2$

32. គេអោយ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n។ ចូរបង្ហាញថា មានពហុធា T_n មួយ ដែល $\cos nx = T_n(\cos x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x។ ពហុធា T_n នេះ គេហៅថា ពហុធា Tchebychev។

33. ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ ចំពោះគ្រប់ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n>1$។

34. តើមានតំបន់ចំនួនប៉ុន្មាន ដែល ចែកនៅលើស្វ៊ែរមួយ ដោយ ប្លង់ចំនួន n កាត់តាម ផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ ដោយដឹងថា គ្មានប្លង់លើសពី៣ ដែលកាត់តាមអង្កត់ផ្ចិតតែមួយ របស់ស្វ៊ែរ ទេ?។

35. តាង $f, f:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ ជាអនុគមន៍មួយ ដែល

$f(n+1)>f(f(n))$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n។

ចូរបង្ហាញថា $f(n)=n$ ចំពោះ គ្រប់ n។

36. តាង

$F_0(x)=x, F(x)=4x(1-x), F_{n+1}(x)=F(F_n(x)), n=0,1,...$។

ចូរបង្ហាញថា

$$\int_0^1 F_n(x)dx=\frac{2^{2n-1}}{2^{2n}-1}$$

(ណែនាំ– តាង $x=\sin^2\theta$)

37. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៨១)

គណនាតំលៃធំបំផុតរបស់ m^2+n^2 ដែលក្នុងនេះ m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $m,n\in\{1,2,3,...,1981\}$ និង $\left(n^2-mn-m^2\right)^2=1$

ចំលើយ

យើងតាង(m,n) ជាគូតំលៃ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។ បើ $m=1$ នោះមានតែ $(1,1)$ និង $(1,2)$ ប៉ុណ្ណោះ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។

ឥលូវយើងសន្មតថា $(m>1,n)$ ជាគូតំលៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។

ដោយ $n(n-m)=m^2\pm1>0$ នោះត្រូវតែ $n>m$ ។

តាង $k=m+n$ ។ ដូច្នេះ $k>n>m$ ហើយ

$$1=\left(n^2-nm-m^2\right)^2=\left(n^2-n(k-n)-(k-n)^2\right)^2$$
$$=\left(n^2-kn+n^2-k^2+2kn-n^2\right)^2$$
$$=\left(n^2-k^2+kn\right)^2$$
$$=\left(k^2-kn-n^2\right)^2$$

ដូច្នេះ (n,k) ក៏ជាគូតំលៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ។ ដូច្នេះ យើងមានគូតំលៃ

(m,n)=(1,2);(2,3);(3,5);(5,8);(8,13);(13,21);(21,34);(34,55);(55,89);

(89,144);(144,233);(233,377);(377,610);(610,987);(987,1597);

(គូបន្ទាប់មកទៀត គឺ (1597,2584) មិនយកព្រោះមានតំលៃធំជាង ១៩៨១)។ ហើយតំលៃធំបំផុតរបស់m^2+n^2 គឺ 1597^2+987^2 ។

តើយើងធ្វើដូចម្តេច ទើបដឹងថាគ្មានគូតំលៃ (m,n) ផ្សេងទៀត ក្រៅពីគូតំលៃខាងលើនេះ។ សន្មតថាមានគូតំលៃ $(m>1,n>1)$ ផ្សេងទៀត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ។ ដូច្នេះ $n>m$ ។ យើងតាង $k=n-m$ យើងអាចបង្ហាញថា (k,m) ក៏ជាគូតំលៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ។ មានន័យថា បើមាន (m,n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះ $(n-m,m)$ ក៏ ផ្ទៀងផ្ទាត់ដែរ ដូច្នេះមានបណ្តាគូតំលៃ(m,n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ និងមានតំលៃកាន់តែតូចទៅៗ ហើយត្រូវចប់នៅត្រឹម គូ $(1,n)$ ។ តែគូតំលៃ $(1,n)$ មានតែ $(1,1)$ រឺ $(1,2)$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា មិនអាចមានគូចំលើយ ណាក្រៅអំពី គូចំលើយ (m,n) ដែលបានរៀបរាប់ខាងលើទេ។

38. គោលការណ៍ទ្រុងព្រាប

រូប–ទ្រុងព្រាប

គោលការណ៍ទ្រុងព្រាប ៖ បើមានព្រាបចំនួន $n+1$ ហើយ ទ្រុងមានរន្ធចំនួន n នោះ វាត្រូវតែមានព្រាបយ៉ាងតិច២ ដែលស្ថិតនៅក្នុងរន្ធតែមួយ។ គោលការណ៍នេះ មើលទៅ

ហាក់ដូចជា ងាយណាស់ នរណាក៏ដឹងដែរ តែវាមានសារៈសំខាន់ខ្លាំងណាស់។ ឧទាហរណ៏ខាងក្រោមនឹងបង្ហាញពីប្រយោជន៏ របស់វា។

39. តាង A ជាសំនុំនៃ២០ចំនួនគត់ ជ្រើសរើសចេញពី ស្វ៊ីតពីជគណិត $1,4,...100$។ ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែមាន២ចំនួនគត់២ផ្សេងគ្នាដែលមានផលបូកស្មើ១០៤។

ចំលើយ

យើងចែក ធាតុទាំង៣៤ របស់ស៊្វីតនេះ ទៅជា ១៩ក្រុម $\{1\}$, $\{52\}$, $\{4,100\}$, $\{7,97\}$, $\{10,94\},\ldots,\{49,55\}$. ដោយយើងត្រូវជ្រើសរើសយកចំនួនគត់ចំនួន២០ ចេញពី សំនុំចំនួន ១៩ខាងលើ នោះតាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប វាត្រូវតែមានចំនួនគត់២ ដែលស្ថិតនៅក្នុង ចំនោមគូណាមួយនៃបណ្តាសំនុំ ខាងលើ ដែលមានផលបូក១០៤។

40. ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំនោមបណ្តា៧ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលធំមិនលើសពី ១២៦ គេអាចរកបាន២ក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនេះ កំនត់ដោយ a និង b ដែល $b<a\leq 2b$។

ចំលើយ

ចែក $\{1,2,...,126\}$ ជា៦សំនុំ

$\{1,2\}$, $\{3,4,5,6\}$, $\{7,...,14\}$, $\{15,...,30\}$, $\{31,...,62\}$ និង $\{63,...,126\}$ ។

តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មាន២ក្នុងចំនោម ៧ចំនួនគត់នោះ ស្ថិតនៅក្នុងសំនុំតែមួយក្នុង ចំនោមសំនុំទាំង៦ ខាងលើ ហើយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $b<a\leq 2b$ ។

41. គេអោយសំនុំមួយមាន១០ចំនួនគត់ធម្មជាតិ ស្ថិតនៅចន្លោះចាប់ពី ១ដល់ ៩៩ ដោយគិតទាំង១និង៩៩ ចូលផង។ ចូរបង្ហាញថា មាន២សំនុំរងមិនទទេ ខុសៗគ្នា នៃសំនុំនេះ ដែលមានផលបូកធាតុរបស់វា ស្មើគ្នា។

ចំលើយ

គេអាចបង្កើតបានពី សំនុំមួយដែលមាន១០ធាតុ នូវ សំនុំរងមិនទទេ ខុសៗគ្នាចំនួន

$$\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=(1+1)^{10}-1=2^{10}-1=1023$$

(តាម $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}C_n^k x^k$)

ចំពោះសំនុំរងនិមួយៗ យើងគណនាផលបូករបស់វា។ ផលបូកធំបំផុត គឺ $90+91+\ldots+99=945<1023$ ។ មានន័យថា ត្រូវតែមានសំនុំរងពីរ ដែលមានផលបូកដូចគ្នា។

42. គេជ្រើសរើស៥៥ចំនួនគត់ចេញពី $\{1,2,\ldots,100\}$ ។ ចូរបង្ហាញថា ទោះគេជ្រើសរើសវាយ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គេគង់បានពីរចំនួន ដែលមានផលសងស្មើ ១០ ដែរ។

ចំលើយ

យើងសង្កេតឃើញថា បើយើងជ្រើសរើស $n+1$ ចំនួនគត់ ចេញពី $2n$ ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា នោះគេត្រូវតែទទួលបានចំនួនពីរ ដែលមានផលសង ស្មើ n ។ ព្រោះ យើងអាចចាប់ផ្គូ $2n$ ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា

$$\{a+1, a+2, a+3, ..., a+2n\}$$

ទៅជា n សំនុំ

$$\{a+1, a+n+1\}, \{a+2, a+n+2\}, ... \{a+n, a+2n\}$$

ដូច្នេះ បើយើងត្រូវជ្រើសរើស យក $n+1$ ចំនួនគត់ ចេញ ពី n សំនុំ នោះ វាត្រូវមានចំនួនគត់ ពីរ ដែលស្ថិតនៅក្នុងសំនុំតែមួយ ហើយមានផលសងស្មើ n។

ឥលូវ យើងបង្កើត៥សំនុំដែលមាន២០ធាតុ ដូចខាងក្រោម

$$\{1, 2, ..., 20\}, \{21, 22, ..., 40\}, \{41, 42, ..., 60\},$$

$$\{61, 61, ..., 80\}, \{81, 82, ..., 100\}$$

យើងត្រូវជ្រើសរើសយក ៥៥ចំនួនគត់ ចេញពី ៥សំនុំខាងលើ ដូច្នេះ ត្រូវមានសំនុំមួយដែលគេ យកយ៉ាងតិច១១ចំនួនគត់។ ពីសំនុំនោះ តាមការអង្កេតខាងលើ (យក $n=10$) ត្រូវមាន២ ចំនួនគត់ ដែលមានផលសងស្មើ១០។

43. (អាមេរិច ១៩៩៤)

គេបិទស្លាក លេខ ថាសចំនួនមួយ ដោយលេខ១, ថាសចំនួន២ ដោយលេខ២, ថាសចំនួន៣ ដោយលេខ៣,..., ថាសចំនួន៥០ ដោយលេខ៥០។ គេដាក់ថាស ដែលបិទស្លាកទាំង $1+2+3+...+50=1275$ នេះ ទៅក្នុងប្រអប់មួយ។ គេទាញថាសម្តងមួយ ចេញពីប្រអប់នេះ ដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ចូលវិញ។ តើថាសតិចបំផុតចំនួនប៉ុន្មាន ដែលត្រូវទាញចេញ ដើម្បីអោយធានាថា មាន យ៉ាងតិចថាសចំនួន១០ មានស្លាកដូចគ្នា?។

ចំលើយ

ឧបមាថា យើងទាញថាសចេញមួយចំនួនដំបូងមានលេខខុសគ្នាទាំងអស់ ដោយមិនមានថាស ណាមានលេខដូចគ្នាដល់ទៅ១០ផងទេ។ ដូច្នេះ សន្មតថាយើងទាញចេញថាសមានលេខ១ដល់

លេខ៩ ទាំងអស់ ដូច្នេះ មានទាំងអស់ $1+2+...+9=45$ ថាស។ ដូច្នេះ ថាសនៅសល់មាន តែ លេខ១០ដល់លេខ៥០។

បន្ទាប់មកទៀត សន្មតថា យើងទាញយកថាសពីក្នុងចំនោម ថាសលេខ ១០ដល់លេខ៥០ មួយមុខចំនួន៩ (ដើម្បីកុំអោយទាន់មានថាស១០មានស្លាកដូចគ្នា)។ ដូច្នេះ យើងយកថាសចេញបាន ចំនួន $45+9.41=414$ ហើយ។

ថាសដែលទាញចេញលើកទី 415 នឹងធ្វើអោយមានថាសចំនួន១០មានលេខដូចគ្នា។

44. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៦៤)

មនុស្ស១៧នាក់ ទាក់ទងគ្នាតាមសំបុត្រ ដោយមនុស្សម្នាក់ៗ សរសេរទៅកាន់មនុស្ស១៦នាក់ទៀតដែលនៅសល់។ពួកគេ ទាក់ទងគ្នា លើប្រធានបទចំនួន៣ប៉ុណ្ណោះ។ រាល់បណ្តា មនុស្សពីរនាក់ សរសេរទៅគ្នាទៅវិញទៅមក លើប្រធានបទតែមួយ ប៉ុណ្ណោះ។ ចូរបង្ហាញថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា។

ចំលើយ

សន្មតថាសុខជាមនុស្សម្នាក់នៅក្នុងមនុស្សទាំង១៧នាក់នោះ។ គាត់សរសេរសំបុត្រទៅមនុស្ស ១៦ នាក់ទៀត។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានប្រធានបទមួយ ក្នុងចំណោមប្រធានបទទាំង៣ ដែលសុខសរសេរទៅកាន់មនុស្សយ៉ាងតិច៦នាក់ផ្សេងគ្នាដែរ ។ ហៅប្រធានបទនោះថា ប្រធានបទលេខ១។ បើសិនជាមាន២នាក់ក្នុងចំណោម៦នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមកនិងទៅសុខ ពីប្រធានបទលេខ១ ដែរ នោះ មានន័យថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា។

ផ្ទុយទៅវិញ សន្មតថា អ្នកទាំង៦នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក តែលើប្រធានបទលេខ១២ រឺលេខ១៣ ប៉ុណ្ណោះ។ សន្មតថា សៅនៅក្នុងចំណោមអ្នកទាំង៦នាក់នេះ។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានប្រធានបទមួយ ក្នុងចំណោមប្រធានបទ២ រឺ៣ ដែលសៅសរសេរទៅកាន់មនុស្សយ៉ាងតិច៣នាក់ផ្សេងគ្នាដែរ ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំង៥នាក់ទៀត។ ហៅប្រធានបទនេះ ថា ប្រធានបទលេខ១២។ បើសិនជាមាន២នាក់ ក្នុងចំណោម៣នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក និងទៅសៅ ពីប្រធានបទ លេខ១២នេះ នោះមានន័យថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា។

ផ្ទុយទៅវិញ បើអ្នកទាំង៣នាក់ នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក តែពីប្រធានលេខ១៣ នោះក៏ មានន័យថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា។

45. **គេអោយ៧ចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $x_1,\dots,x_7$ ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនេះត្រូវតែមាន២ចំនួនពិត a និង b ដែល** $$0<\frac{a-b}{1+ab}<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

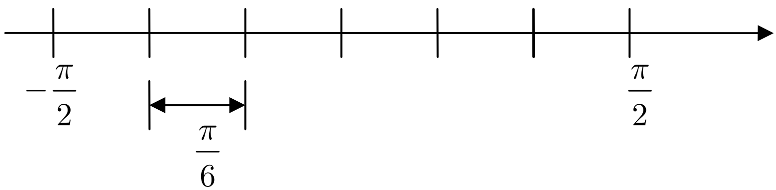
ចំលើយ

តាង $x_k=\tan a_k$ ដែល a_k ផ្ទៀងផ្ទាត់ $-\frac{\pi}{2}<a_k<\frac{\pi}{2}$ ។

ចែក ចន្លោះ$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ជាកូនចន្លោះដែលមានប្រវែងស្មើគ្នា ហើយមិនជាន់គ្នា។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មាន២ក្នុងចំនោម៧ចំនុចស្ថិតនៅក្នុងកូនចន្លោះតែមួយ តាងដោយ

$a_i < a_j$ ។ ដូច្នេះ $0 < a_j - a_i < \frac{\pi}{6}$ ។ ដោយអនុគមន៍តង់សង់ កើន ចន្លោះ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ នោះ យើងមាន

$$0 < \tan\left(a_j - a_i\right) = \frac{\tan a_j - \tan a_i}{1 + \tan a_j \tan a_i} < \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



46. (កាណាដា ១៩៨១)

តាង $a_1, a_2, ..., a_7$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $a_1 + a_2 + ... + a_7 = 1$ ។
បើ $M = \max\limits_{1\le k\le 5}\left(a_k + a_{k+1} + a_{k+2}\right)$ ចូរគណនា តំលៃតូចបំផុតដែល M អាចមាន នៅពេលដែល a_k ប្រែប្រួល។

ចំលើយ

ដោយ $$a_1 \le a_1 + a_2 \le a_1 + a_2 + a_3$$

និង $$a_7 \le a_6 + a_7 \le a_5 + a_6 + a_7$$

ដូច្នេះ M ក៏ស្មើនឹងតំលៃខាងក្រោមដែរ

$$M = \max_{1\le k\le 5}\left(a_1, a_7, a_1 + a_2, a_6 + a_7, a_k + a_{k+1} + a_{k+2}\right)$$

ដូច្នេះ មានន័យថា M ជាតំលៃធំបំផុតនៃ ៩ចំនួន ដែលមានផលបូក ស្មើនឹង $3\left(a_1 + a_2 + ... + a_7\right) = 3$ ។ ដូច្នេះ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានមួយក្នុងចំនោមចំនួន

ទាំង៩នេះ ដែលមានតំលៃធំជាង $3/9=1/3$ ។ មានន័យថា $M\geq 1/3$ ។ តើ M អាចស្មើ $1/3$ រឺទេ?។

បើ

$$a_1=a_1+a_2=a_1+a_2+a_3=a_2+a_3+a_4$$
$$=a_3+a_4+a_5=a_4+a_5+a_6=a_5+a_6+a_7$$
$$=a_7=\frac{1}{3}$$

នោះ យើងទាញបាន

$$\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\right)=\left(1/3,0,0,1/3,0,0,1/3\right)$$

ដែលនាំអោយ $M=1/3$ ។

47. គេមាន៥ចំនុច ស្ថិតនៅក្នុងរឺនៅលើ ការេមួយ មានជ្រុងរង្វាស់១ ចូរបង្ហាញថា មានគូចំនុចមួយ នៃបណ្តាចំនុចទាំងនេះ ដែលស្ថិតនៅចំងាយមិនលើសពី $\sqrt{2}/2$ ពីគ្នា។

48. ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំណោមមនុស្ស៦នាក់ នៅក្នុងបន្ទប់ មួយ មានយ៉ាងហោចណាស់ក៏៣នាក់ដែរ ដែលស្គាល់គ្នា រឺបើមិនអញ្ចឹងទេ ក៏ មានយ៉ាងហោចណាស់ក៏៣នាក់ដែរ ដែលមិនស្គាល់គ្នា។

49. យើងហៅសំនុំមួយ ដែលមិនអាចមានផលបូកធាតុ២របស់វាស្មើនឹងធាតុទី៣ថា សំនុំមានផលបូកសេរី។ តើ សំនុំមានផលបូកសេរី ដែលជាសំនុំរងរបស់ $\{1,2,...,2n-1\}$ មានធាតុច្រើនបំផុតចំនួនប៉ុន្មាន?។

(ណែនាំ៖ ពិនិត្យ សំនុំ $\{n+1,n+2,..,2n-1\}$) ដែលមាន $n+1$ ធាតុជាសំនុំ មានផលបូកសេរី។ អ្នកត្រូវបង្ហាញថា គ្រប់សំនុំ ទាំងអស់ដែលមាន $n+2$ ធាតុ មិនអាចជា សំនុំមានផលបូកសេរី ទេ។)

50. ឧបមាថា តួអក្សរអង់គ្លេស ត្រូវបានតំរៀបជាជួរតាមលំដាប់លំដោយណាមួយ។

(១) ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែមាន ព្យញ្ជនៈចំនួន៤ នៅបន្តបន្ទាប់គ្នា។

(២) ចូរអោយឧទាហរណ៍មួយ ដែលថា មិនអាចត្រូវតែមានព្យញ្ជនៈ ចំនួន៥ នៅបន្តបន្ទាប់គ្នាទេ។

(៣) ឧបមាថា អក្សរទាំងអស់ត្រូវបានតំរៀបនៅលើរង្វង់មួយ។ ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែមាន ព្យញ្ជនៈ ចំនួន៥ នៅបន្តបន្ទាប់គ្នា។

(សំគាល់៖ អក្សរអង់គ្លេស មាន a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v, x,y,z។ មានស្រះចំនួន៦ និង ព្យញ្ជនៈចំនួន១៩)

51. សុខ មានហោប៉ៅចំនួន ១០ និង លុយរាយក្រដាស១០០ ចំនួន ៥៤សន្លឹក។ គាត់ចង់ដាក់លុយចូលហោប៉ៅ ដោយអោយ ហោប៉ៅរបស់គាត់មាន លុយខុសគ្នា។ (១) តើគាត់អាចធ្វើដូច្នេះ បានរឺទេ?។ (២) សិក្សាករណីទូទៅ ពិនិត្យករណីមាន p ហោប៉ៅ និង ក្រដាស១០០ ចំនួន n សន្លឹក។ ចំនោទនេះ មានលក្ខណៈពិសេសករណី $n=\frac{(p-1)(p-2)}{2}$

តើហេតុអ្វី?។

52. ចូរបង្ហាញថា ទោះបីគេជ្រើសរើសយក 55 ចំនួនគត់ ចេញពី

$\{1,2,...,100\}$

យ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គេគង់តែជ្រើសរើសបាន ២ចំនួនមានផលសងស្មើ ៩, ២ចំនួនមានផលសងស្មើ ១០ និង ២ចំនួនមានផលសងស្មើ ១៣, តែគេមិនចាំបាច់ត្រូវតែទទួលបាន ២ចំនួនមានផលសងស្មើ ១១ រហូតទេ។

53. គេអោយ $mn+1$ ចំនួនពិត ខុសៗគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនោះ មានស៊ីតកើនមួយ ដែលមានចំនួនតួយ៉ាងហោចណាស់ក៏ $n+1$ ដែរ រឺក៏បើមិនអញ្ចឹង ស៊ីតចុះមួយ ដែលមានចំនួនតួយ៉ាងហោចណាស់ក៏ $m+1$ ដែរ។

54. គ្រប់ចំនុចទាំងអស់ក្នុងប្លង់មួយ ត្រូវគេផាត់ដោយពណ៌ស ខ្មៅ រឺក្រហម ចូរបង្ហាញថាត្រូវតែមាន ចំនុច២ ដែលមានពណ៌ដូចគ្នា នៅចំងាយពីគ្នា មួយឯកតា។

55. គ្រប់ចំនុចទាំងអស់ក្នុងប្លង់មួយ ត្រូវគេផាត់ដោយពណ៌សរឺ ខ្មៅ ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែត្រីកោណសមបាតមួយ ដែលមានកំពូលរបស់វា មានពណ៌ដូចគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា គេអាចផាត់ពណ៌ដោយអត់មានត្រីកោណសមបាត ដែលមានជ្រុងសមបាតរង្វាស់១ មានកំពូលមានពណ៌ដូចគ្នា។

56. តាង $r_1,r_2,...,r_n$ ជាចំនួនពិត នៅចន្លោះ $[0,1]$ ដោយគិតទាំង 0 និង 1 ផង។ ចូរបង្ហាញថា មាន $\varepsilon_k, 1\le k\le n, \varepsilon_k=-1,0,1$ ដែលមិនសូន្យព្រមគ្នា ដែល

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k r_k\right|\le\frac{n}{2^n}$$

57. (អាមេរិច ១៩៧៩) អ្នកគណិតវិទ្យា៩នាក់ ជួបគ្នានៅ សន្និសីទអន្តរជាតិមួយ។ គេបានដឹងថា ក្នុងចំនោមមនុស្ស៣នាក់ មានយ៉ាងហោចណាស់ក៏២នាក់ដែរ ដែលនិយាយភាសាដូចគ្នា។ បើ អ្នកគណិតវិទ្យា ទាំងអស់នេះ ម្នាក់ៗសុទ្ធតែអាចនិយាយបានយ៉ាងច្រើនបំផុត ៣ភាសា ចូរបង្ហាញថា មាន អ្នកគណិតវិទ្យាយ៉ាងហោចណាស់ក៏៣នាក់ ដែរ ដែលអាចនិយាយភាសាដូចគ្នាបាន។

58. (អាមេរិច ១៩៨២) នៅក្នុងពិធីជប់លៀងមួយមានមនុស្សចំនួន១៩៨២នាក់ចូលរួម។ នៅក្នុងចំនោម បណ្តាមនុស្ស៤ នាក់ មានយ៉ាងហោចណាស់ក៏មនុស្សម្នាក់ដែរ ដែលស្គាល់អ្នក៣នាក់ទៀត។ តើ មានមនុស្សតិចបំផុតចំនួនប៉ុន្មាននាក់ ដែលស្គាល់អ្នកដទៃទៀតគ្រប់គ្នា?។

59. (អាមេរិច ១៩៨៥) មានមនុស្សទាំងអស់ចំនួន n នាក់ចូលរួមក្នុងពិធីជប់លៀងមួយ។ ចូរបង្ហាញថា មានមនុស្សពីរនាក់ ដែល ក្នុងចំនោមអ្នកដទៃទៀតចំនួន $n-2$ នាក់ មានយ៉ាងហោចណាស់ ក៏ $[n/2]-1$ នាក់ដែរក្នុងចំនោមពួកគេ ដែលស្គាល់អ្នកទាំង២នាក់នោះ រឺបើមិនអញ្ចឹង មិនស្គាល់អ្នកទាំងពីរនាក់នោះ។ សន្មតថា ការស្គាល់គ្នា ជាទំនាក់ទំនងស៊ីមេទ្រី មានន័យថា បើ ក ស្គាល់ ខ នោះ ខក៏ស្គាល់ ក ដែរ។

60. (អាមេរិច ១៩៨៦) នៅក្នុងថ្នាក់រៀនគណិតវិទ្យាមួយ រាល់សិស្សម្នាក់ៗ ក្នុងចំនោមសិស្សទាំង៥នាក់ ងោក២ដង ក្នុងពេលរៀន។ ចំពោះរាល់សិស្ស

ពីរ៧នាក់ក្នុងចំនោមអ្នកទាំង៥នាក់នេះ មានខណៈមួយ ដែលពួកគេទាំង២ងោក ព្រមគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា មានខណៈមួយ មានសិស្ស៣នាក់ងោកព្រមគ្នា។

61. តាង P_n ជាសំនុំនៃបណ្តា $[e.n!]+1$ ចំនុចនៅក្នុងប្លង់មួយ។ រាល់បណ្តាពីរចំនុចផ្សេងគ្នារបស់ P_n ត្រូវភ្ជាប់គ្នាដោយបន្ទាត់មួយ ដែលបន្ទាប់មកនឹងត្រូវលាបដោយពណ៌មួយ ក្នុងចំនោមពណ៌ចំនួន n។ ចូរបង្ហាញថា យ៉ាងហោចណាស់ក៏គេ ទទួលបានត្រីកោនមួយ ដែលមានពណ៌តែមួយដែរ។ (ណែនាំះ $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$)

62. និយមន័យ–ភាពចែកដាច់

បើ $a\neq 0,b$ ជាចំនួនគត់ យើងនិយាយថា a ចែកដាច់ b បើសិនជា មានចំនួនគត់ c មួយ ដែល

$$ac=b$$

យើងសរសេរថា $a\,|\,b$។

ទ្រឹស្តីបទ

១– បើ a,b,c,m,n ជាចំនួនគត់ដែល $c\,|\,a,\ c\,|\,b$ នោះ $c\,|\left(am+nb\right)$

២– បើ x,y,z ជាចំនួនគត់ដែល $x\,|\,y,\ y\,|\,z$ នោះ $x\,|\,z$។

៣– បើ $a\,|\,b$ និង $b\neq 0$ នោះ $1\leq|a|\leq|b|$

63. ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n+1$ ចែកដាច់ n^2+1

ចំលើយ

យើងមាន

$$n^2+1=n^2-1+2$$
$$=(n-1)(n+1)+2$$

ដូច្នេះត្រូវតែ $n+1|2$ ហើយមានតែ $n+1=1$ រឺក៏ $n+1=2$ ។ដូច្នេះ $n=0,1$ ។ដោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដូច្នេះ $n=1$ ។

64. បើ 7 ចែកដាច់ $3x+2$ ចូរបង្ហាញថា 7 ចែកដាច់ $15x^2-11x-14$

ចំលើយ

$$15x^2-11x-14=(3x+2)(5x-7)$$

ដូច្នេះ មានន័យថា បើ $7|3x+2$ នោះ $7|15x^2-11x-14$

65. ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $5^{n-1}+3^{n-1}$ ចែកដាច់ 5^n+3^n ។

ចំលើយ

យើងមាន

$$3\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)<3^n+5^n<5\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$$

ដូច្នេះ $3<\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}<5$ មានន័យថា ផលធៀប $\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}$ មិនអាចជាចំនួនគត់ក្រៅពី៤ទេ ដូច្នេះ

$$3^n+5^n=4\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 3^{n-1}=5^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad n=1$$

66. ទ្រឹស្ដីបទ

ផលគុណនៃ n ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា ចែកដាច់នឹង $n!$។

សំរាយបញ្ជាក់

ជាដំបូង យើងសន្មតថា បណ្ដា n ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា $m+1, m+2, ..., m+n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ដោយដឹងថា មេគុណទ្វេធា ជាចំនួនគត់

$$\binom{m+n}{n}=\frac{(m+n)!}{n!m!}=\frac{(m+n)(m+n-1)...(m+1)}{n!}$$

ដូច្នេះ មានន័យថា ផលគុណ $(m+1)...(m+n)$ ចែកដាច់នឹង $n!$។

បើមានមួយក្នុងចំនោមបណ្ដាចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាទាំងអស់នេះ ស្មើ 0 នោះផលគុណស្មើ0 ហើយចែកដាច់នឹង $n!$។

បើបណ្ដា ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាទាំងអស់នេះ សុទ្ធតែជាចំនួនអវិជ្ជមាន នោះ ផលគុណនោះដូចគ្នានឹងករណី វិជ្ជមាន គុណនឹង $(-1)^n$។ ដូច្នេះ វាក៏ចែកដាច់នឹង $n!$។

67. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ចំនួន n^3-n ជាពហុគុណនៃ៦។

រឺ ចូរបង្ហាញថា 6 ចែកដាច់ n^3-n ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n។

ចំលើយ

$n^3-n=n(n-1)(n+1)$

មានន័យថា n^3-n ជាផលគុណនៃ៣ចំនួនគត់តរៀងគ្នា។ ក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនោះ ចាំបាច់ត្រូវតែមានមួយជាពហុគុណនៃ២ និងមួយទៀតជាពហុគុណនៃ៣ ព្រោះ៣ចំនួនតរៀងគ្នាមានរាង $(3k;\ 3k+1;\ 3k+2;\ldots)$។ បើ k គូ នោះ យើងមាន$3k$ ជាពហុគុណនៃ៦។ បើ k សេស នោះ $k=2m+1$ នោះ $3k+1=6m+4$ ជាពហុគុណនៃ2 ។

68. ចូរបង្ហាញថា $2x+3$ ជាពហុគុណនៃ១១ លុះត្រាតែ $5x+2$ ជាពហុគុណនៃ១១ដែរ និងច្រាសមកវិញ។

ចំលើយ

$$5x+2=8(2x+3)-11(x+2)$$

រឺក៏ $$2x+3=7(5x+2)-11(3x+11)$$

69. តាង $p>3$ ជាចំនួនបឋម។ ចូរបង្ហាញថា p^2-1 ជាពហុគុណនៃ១២។

ចំលើយ

$p^2-1=(p-1)(p+1)$

ដោយ p ជាចំនួនបឋម ខុសពី២ នោះ p ជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះ $p-1$ និង $p+1$ គូទាំង២ ដូច្នេះផលគុណរបស់វាជាពហុគុណនៃ៤។

ដោយ $p>3$ ដូច្នេះ p មិនអាចជាពហុគុណនៃ៣ទេ។ ដូច្នេះ មានមួយក្នុងចំណោម $p-1$ រឺ $p+1$ ជាពហុគុណនៃ៣ ដូច្នេះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ៣។

ដូច្នេះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ៣ផងនិង នៃ៤ផង ហើយ ៣បឋមនឹង៤ នោះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ១២។

70. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៩៤)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត (m,n) ដែល $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ ជាចំនួនគត់។

ចំលើយ

សន្មត (m,n) ជាគូចំលើយដែលត្រូវរក។ នោះ $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ ជាចំនួនគត់។ ដូចគ្នា

$$m^3\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{(mn)^3-1+m^3+1}{mn-1}$$

$$=(mn)^2+mn+1+\frac{m^3+1}{mn-1}$$

មានន័យថា $\dfrac{m^3+1}{mn-1}$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ។ មានន័យថា បើ (m,n) ជាចំលើយ នោះ (n,m) ក៏ជាចំលើយដែរ។ ដូច្នេះជាដំបូងយើងតំរៀប $m\geq n$ សិន។

តាង $K=\dfrac{n^3+1}{mn-1}\geq 1$ ។ យើងទាញបាន

$$n^3+1=K(mn-1)$$

$n^3 + Kmn + (K+1) = 0$

$\Rightarrow$ n ចែក $K+1$ ដាច់។

$\Rightarrow$ $K = nx - 1$ ចំពោះចំនួនគត់ $x \geq 1$ ណាមួយ។

ចំពោះ $n > 1$

$$nx - 1 = K = \frac{n^3+1}{mn-1} \leq \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1} \leq n+1$$

បើ $n \geq 3$ នោះ

$$nx - 1 \leq n + \frac{1}{n-1} < n+1$$

$\Rightarrow$ $n(x-1) < 2$

$\Rightarrow$ $n(x-1) = 0;1$

$\Rightarrow$ $n(x-1) = 0$ ព្រោះ $n \geq 3$

$\Rightarrow$ $x - 1 = 0 \Rightarrow$ $x = 1$ ។

$\Rightarrow$ $n - 1 = \dfrac{n^3+1}{mn-1}$

$\Rightarrow$ $m = n + 1 + \dfrac{2}{n-1}$

$\Rightarrow$ $n-1$ ចែក២ដាច់។ ដោយ $n \geq 3$ ដូច្នេះ មានតែ $n - 1 = 2$

$\Rightarrow$ $n = 3;\ m = 5$ ។

ករណី $n < 3$

បើ $n = 2$, $K = \dfrac{9}{2m-1}$, $2m - 1 = 1;3;9$ មានន័យថា $m = 1;2;5$ ។ យើងយក

$(m,n) = (2,2);(5,2)$ (ព្រោះយើងសន្មតថា $m \geq n$)។

បើ $n = 1$,

$K=\dfrac{2}{m-1}$, $m-1=1;2;$ មានន័យថា $m=2;3$ ។ យើងទាញបាន $(m,n)=(2,1);(3,1)$ ។

ដូច្នេះជាសរុបចំលើយគឺ $(m,n)=(2,1);(3,1)\ (2,2);(5,2);\ (5,3)$ និងចំលាស់របស់វា $(1,2);(1,3);(2,5);(3,5)$ ។

71. **ចូរកំនត់បណ្ដាចំនួនគត់ a,b និង c ធំជាង១ ដែល a ចែកដាច់ $bc-1,$ b ចែកដាច់ $ca-1$**

និង c ចែកដាច់ $ab-1$។

ចំលើយ

a ចែកដាច់ $bc-1$ នោះ មាន $m\geq 1$ ដែល $ma=bc-1$ ។ ដូច្នេះ $bc-ma=1$ ។ បើ a និង b មានតួចែករួម ស្មើ $k>1$ នោះ $a=pk,b=qk$ ដូច្នេះ $qkc-mpk=1$ រឺ $qc-mp=\dfrac{1}{k}$ ។ អង្គខាងឆ្វេងនៃសមភាពនេះ ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះមានតែ $k=1$ ។ ដូច្នេះ a និង b មានតួចែករួមធំមិនលើសពី១ ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ តាមរបៀបដូចគ្នាយើងទាញបាន a,b,c បឋមនឹងគ្នា២ៗ។

បើ a ចែកដាច់ $bc-1$ នោះ វាចែកដាច់ $bc+ac+ab-1$ ។ ដូចគ្នា b និង c ត្រូវតែចែកដាច់ $bc+ac+ab-1$ ។ ដោយ a,b,c បឋមនឹងគ្នា២ៗ នោះយើងទាញបាន abc ចែកដាច់ $ab+bc+ca-1$ ។ ផលធៀប

$$\frac{ab+bc+ca-1}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$$

មានតំលៃតូចជាងរឺស្មើ $\frac{3}{2}$ ។ ដូច្នេះវាត្រូវតែស្មើ ១។

ដូច្នេះ យើងទាញបានសមីការ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}=1$$

ជាដំបូងយើងសន្មតថា $a \le b \le c$ ។ យើងទាញបាន

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{abc}=\frac{3}{a}-\frac{1}{abc}$$

$$1<1+\frac{1}{abc}\le\frac{3}{a}$$

ដូច្នេះ $a<3$ ។ ដោយ $a>1$ នោះ $a=2$ ។

សមីការទៅជា

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2bc}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2bc}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-\frac{1}{2bc}=\frac{2}{b}-\frac{1}{2bc};\ b<4.$$

ដោយ $a=2\le b<4$ នោះ $b=2;3$ ។

ករណី $b=2$ សមីការគ្មានចំលើយ។

ករណី $b=3 \Rightarrow c=5$ ។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ឃើញថា $(2,3,5)$ ជាចំលើយរបស់

សមីការ។

ដូច្នេះជាសរុបសមីការមានចំលើយ $(2,3,5)$ និង ចំលាស់របស់វា

$(2,5,3);(3,2,5);(3,5,2);(5,2,3);$ និង $(5,3,2)$ ។

72. សុខ និង សៅលេងល្បែងដូចតទៅ។ ពួកវាចាប់ផ្តើមដោយជ្រើសរើសចំនួនគត់មួយ $n > 0$ ។

បន្ទាប់មកទៀត សុខជ្រើសរើសយកចំនួនគត់ m មួយជាសំងាត់ ដែល $0 < m < n$ ។

សៅជាអ្នកទាយលេខសំងាត់នេះ។ ដើម្បីអោយសៅអាចទាយបាន សៅអាចសួរលេខ k ណាមួយទៅសុខ ហើយសុខឆ្លើយថា $m + k$ ជាចំនួនបឋមរឺអត់។ ចូរបង្ហាញថា សៅអាចកំនត់លេខសំងាត់របស់សុខបានដោយសួរយ៉ាងច្រើន $n - 1$ សំនួរ។

ចំលើយ

យើងដឹងថា មានចំនួនបឋម p មួយដែល គ្រប់ ចំនួន $p+1,...,p+n$ ជាចំនួនពហុគុណ។ សៅត្រូវកំនត់រកចំនួនបឋម p នោះសិន។ សៅអាចសួរទៅសុខនូវបណ្តាចំនួនគត់ $\{1,...,n-1\}$ ម្តងមួយៗ។ ដើម្បីដឹងថា m ជាលេខ១រឺអត់ វាសួរ លេខ $p-1$ បើ សុខឆ្លើយថា បឋមនោះ $m = 1$ ។ បើមិនមែនទេ m មិនមែនជាលេខ១ទេ។ បន្ទាប់មកទៀតវាតេស្តលេខ២ទៀត ដោយសួរទៅសុខនូវលេខ $p-2$ ហើយធ្វើសេចក្តីសន្និដ្ឋានដូចខាងលើ។

ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា សៅត្រូវសួរយ៉ាងច្រើន $n-1$ សំនួរ ព្រោះ វាមិនចាំបាច់តេស្តលេខ $n-1$ ទេ ព្រោះ បើ គ្រប់ $p-k$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ចំពោះ $k \leq n-2$ នោះ $m = n-1$ ។

73. (បាល់កង់ ១៩៩៦)

គេអោយចំនួនបឋម $p > 5$ ។ គេកំនត់

$$S = \left\{p - n^2, n \in N, n^2 < p\right\}$$

ចូរបង្ហាញថា មាន a និង b ជាធាតុរបស់ S ដែល $1 < a < b$ ហើយ a ចែកដាច់ b។

ចំលើយ

ដំបូងយើងពិនិត្យករណី $1 \in S$។ ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ n ដែល $p = n^2 + 1$។ ដូច្នេះ $n > 2$ ហើយ n គូ។ តាង $a = p - \left(n-1\right)^2 = 2n$ និង $b = p - 1 = n^2$ ។ ដូច្នេះយើងមាន a និង b ជាធាតុរបស់ S ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $1 < a < b$ ហើយ a ចែកដាច់ b ព្រោះ n គូ។

ម្តងនេះយើងសន្មតថា $1 \notin S$។ ដូច្នេះ មាន $n > 2$ ដែល

$$n^2 + 1 < p < \left(n+1\right)^2 - 1 = n\left(n+2\right)$$

វិសមភាពខាងស្តាំជាវិសមភាពដាច់ខាត ព្រោះ p ជាចំនួនបឋម។ តាង $a = p - n^2 \in S$ ។ យើងមាន $a - n = p - n\left(n+1\right)$ ជាចំនួនខុសពីសូន្យ ព្រោះ p ជាចំនួនបឋមហើយតូចជាង n ដាច់ខាត។ តាង $b = p - \left(a-n\right)^2 \in S$ ។ យើងមាន $b = a\left(1 + 2n - a\right)$។ យើងមាន $a < 2n$ និង $1 + 2n - a > 1$ ព្រោះ $a < b$ ។ ដូច្នេះ គូ $\left(a,b\right)$ នេះផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនេះ។

74. **គេអោយ 5 ចែកដាច់ $\left(n+2\right)$។ តើក្នុងចំនោមបណ្តាចំនួនខាងក្រោមមួយណាចែកដាច់នឹង 5**

$$n^2 - 4, n^2 + 8n + 7, n^4 - 1, n^2 - 2n$$

75. **ចូរបង្ហាញថា $n^5 - 5n^3 + 4n$ ចែកដាច់នឹង 120 ជានិច្ច។**

76. ចូរបង្ហាញថា $\frac{(2m)!(3n)!}{(m!)^2(n!)^3}$ ជាចំនួនគត់ជានិច្ច។

77. ចូរបង្ហាញថា $n^9-6n^7+9n^5-4n^3$ ចែកដាច់នឹង 8640 ជានិច្ច។

78. ចូរបង្ហាញថា បើ $n>4$ មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះ n ចែកដាច់ $(n-1)!$។
(ណែនាំ៖ សិក្សាករណី n ជាការេនៃចំនួនគត់ និង មិនមែនជាការេនៃចំនួនគត់)។

79. ចូរបង្ហាញថា មិនមានពាចំនួនបឋម ដែលមានរាង $p,p+2,p+4$ ទេ លើកលែងតែ $3,5,7$។

80. ចូរបង្ហាញថា $n\in\mathbb{N},(n!)!$ ចែកដាច់នឹង $(n!)^{(n-1)!}$។

81. (អាមេរិច 1986) គណនាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំបំផុត n ដែល

$\left(n+10\right)$ ចែកដាច់ $\left(n^3+100\right)$

(ណែនាំ៖ $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$)

82. (អេស្ប៉ាញ ១៩៨៥) បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ចូរបង្ហាញថា

$(n+1)(n+2)\ldots(2n)$ ចែកដាច់នឹង 2^n។

83. គណនាចំនួនគត់ (x,y) ដែល

$$\left(x^2+y\right)\left(x+y^2\right)=\left(x-y\right)^3$$

84. គណនាចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $n^{n+1}+(n+1)^n$ ចែកដាច់នឹង 5។

85. គណនាចំនួនគត់ ដែល

$$x\left(1+x+x^2\right)=4y\left(y+1\right)$$

86. គេអោយ៣ចំនួនគត់ x, y, z ដែល $x^4+y^4+z^4=1984$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$p=20^x+11^y-1996^z$$

អាចសរសេរជាផលគុណនៃ ២ចំនួនគត់ធម្មជាតិបន្តបន្ទាប់គ្នាបាន។

87. ទ្រឹស្តីបទ–វិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

បើ a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ គេមានចំនួនគត់ q,r មួយគត់ ដែល $a=bq+r, 0\le r<b$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

ដំបូងយើងបង្ហាញថា មាន q,r ។ សំនើពិត ដោយយើងយក

$$q=\left[\frac{a}{b}\right] \qquad \text{និង } r=a-bq$$

តែយើងត្រូវបង្ហាញថា $0\le r<b$ ។ យើងដឹងថា $q\le \frac{a}{b}<q+1$

នាំអោយ យើងទាញបាន $0\le r<b$ ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងបង្ហាញថា គេមាន q,r តែមួយគត់។ យើងឧបមាថា គេអាចរកឃើញ q,r,q',r' ដែល

$$a=bq+r=bq'+r'$$

$$b(q-q')=r'-r$$

ដូច្នេះ b ចែក $r'-r$ ដាច់ តែ $|b|>|r'-r|$ ដូច្នេះ មានតែ $r'-r=0$ នាំអោយ $r'=r$ រួចហើយ $q'=q$ ។

គួរកត់សំគាល់ថា ចំពោះចំនួនគត់ $n>0$ មួយ តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ គេអាចចែកសំនុំចំនួនគត់ទៅតាមសំនល់របស់វិធីចែកនឹង n ។ ឧទាហរណ៍ គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ស្ថិតនៅក្នុងចំនោម $3k, 3k-1,\ \ 3k-2$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត សំនុំ $3k+2, k\in\mathbb{Z}$ ដូចគ្នានឹង សំនុំ $3k-1, k\in\mathbb{Z}$ ដែរ។

88. (អាមេរិច ១៩៩៤)

តាង r ជាសំនល់នៃវិធីចែក $1059, 1417$ និង 2312 នឹង $d>1$។ គណនា $d-r$។

ចំលើយ

តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

$$1059 = q_1 d + r$$

$$1417 = q_2 d + r$$

$$2312 = q_3 d + r$$

ដែល q_1, q_2, q_3 ជាចំនួនគត់។

យើងទាញបាន

$$2.179 = 358 = 1417 - 1059 = d(q_2 - q_1)$$

$$7.179 = 1253 = 2312 - 1059 = d(q_3 - q_1)$$

$$5.179 = 895 = 2312 - 1417 = d(q_3 - q_2)$$

ដូច្នេះ មានន័យថា $d \mid 2.179,\ d \mid 7.179,$ និង $q \mid 5.179$។ ដោយ $d>1$ ដូច្នេះ $d = 179$។

ដោយ $1059 = 5.179 + 164$ ដូច្នេះ $r = 164$។ ដូច្នេះ $d - r = 179 - 164 = 15$។

89. ចូរបង្ហាញថា n^2+23 ចែកដាច់នឹង 24 ចំពោះចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់។

ចំលើយ

$$n^2 + 23 = n^2 - 1 + 24 = (n-1)(n+1) + 24$$

យក $n = 24k \pm 1, k = 0,1,2,...$ នោះ យើងទាញបាន កន្សោមដែលអោយចែកដាច់នឹង ២៤។

90. និយមន័យ–ចំនួនបឋម

ចំនួនបឋម p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ធំជាង ១ ដែលតួចែករបស់វាមានតែលេខ ១ និង p។ បើចំនួនគត់ $n > 1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម យើងហៅវាថា ចំនួនពហុគុណ ។ យើងអាចសរសេរ n ជា $n = ab,$ ដែល $1 < a \le b < n, a, b \in \mathbb{N}$។

ឧទាហរណ៍

ចំនួនបឋម: ២ ៣ ៥ ៧ ១១ ១៣ ១៧ ១៩

ចំនួនពហុគុណ ៤ ៦ ៨ ៩ ១០ ១២

១ មិនមែនជាចំនួនបឋម ហើយក៏មិនមែនជា ចំនួនពហុគុណដែរ។ យើងឃើញថា 2 ជាចំនួនបឋមគូតែមួយគត់ ហើយ 2 និង 3 ជាចំនួនគត់តរៀងគ្នា តែមួយគត់ ដែលបឋមទាំង២។

91. ចូរបង្ហាញថា បើ $p > 3$ ជាចំនួនបឋម នោះ 24 ចែកដាច់ $\left(p^2 - 1\right)$ ។

ចំលើយ

ចំនួនគត់ទាំងអស់អាចមានរាងមួយ ក្នុងចំនោមរាងទាំង ៦ ខាងមុខនេះ ៖

$6k, 6k \pm 1, 6k \pm 2, 6k + 3$ ។

បើ $p>3$ ជាចំនួនបឋម នោះវាត្រូវតែមានរាង $6k\pm1$ (ព្រោះផ្សេងទៀត ចែកដាច់នឹង ២រឺនឹង៣)។

$p^2-1=(6k\pm1)^2-1=36k^2\pm12k=12k(3k-1)$

បើ k ជាចំនួនគូ នោះ $24|\left(p^2-1\right)$។

បើ k ជាចំនួនសេស នោះ $3k-1$ ជាចំនួនគូ នាំអោយ $24|\left(p^2-1\right)$។

92. ចូរបង្ហាញថា ការេនៃចំនួនគត់ មានរាង $4k$ រឺក៏ $4k+1$។

ចំលើយ

ចំនួនគត់ទាំងអស់អាចមានរាងមួយ ក្នុងចំណោមរាងទាំង ២ ខាងមុខនេះ ៖ $2k, 2k+1$។

ដោយលើកវាជាការេ យើងទាញបាន

$$(2k)^2=4k^2$$

$$(2k+1)^2=4\left(k^2+k\right)+1$$

93. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់នៅក្នុងស្វ៊ីត $11,111,1111,....$ ជាការេនៃចំនួនគត់មួយទេ។

ចំលើយ

ការេនៃចំនួនគត់មួយមានរាង $4k$ រឺ $4k+1$ ។ គ្រប់ចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងស្វ៊ីតនេះ មានរាង $4k-1$ ដូច្នេះ វាមិនអាចជា ជាការេនៃចំនួនគត់មួយទេ។

94.ចូរបង្ហាញថា ពីក្នុងចំនោម៣ចំនួនគត់ណាមួយ គេអាចជ្រើសរើសយក២ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ a^3b-ab^3 ចែកដាច់នឹង១០។

ចំលើយ

$a^3b-ab^3=ab(a-b)(a+b)$ ជាចំនួនគូ ជានិច្ច។
បើសិនជាមានមួយក្នុងចំនោមចំនួនគត់ទាំង៣ មានរាង $5k$ នោះ សំនើពិត។
បើសិនជាចំនួនគត់ទាំង៣សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង ៥ នោះ ពួកវាស្ថិតនៅក្នុង ចំនោម ក្រុមចំនួនមានរាង $5k\pm1$ រឺ$5k\pm2$ ។ ដោយគេមាន៣ចំនួនគត់ នោះ គេត្រូវមាន២ចំនួនដែលស្ថិតនៅក្នុងក្រុមតែមួយ (ក្រុម ដែលមានរាង $5k\pm1$ រឺ$5k\pm2$)។ ផលបូករឺបើមិនអញ្ចឹងទេ ផលសងនៃ២ចំនួននោះ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង៥។ ដូច្នេះ សំនើពិត។

95.ចូរបង្ហាញថា បើ 3 ចែកដាច់$\left(a^2+b^2\right)$ នោះ 3 ចែកដាច់ a និង 3 ចែកដាច់ b ។

ចំលើយ

សន្មតថា

$a=3k\pm1,$ និង $b=3m\pm1$

$a^2+b^2=3y+2$ មិនអាចចែកដាច់នឹង៣ ទេ។

$(a=3k\pm1,$ និង $b=3m)$ រឺ $(a=3k,$ និង $b=3m\pm1)$

$a^2+b^2=3y+1$ មិនអាចចែកដាច់នឹង៣ ទេ។

ដូច្នេះ មានតែ a និង b ចែកដាច់នឹង ៣ទាំង២ ទើប $3|\left(a^2+b^2\right)$ ។

96. ចូរបង្ហាញថា បើ a និង $b \neq 0$ ជាចំនួនគត់ នោះ មានចំនួនគត់ q និង r មួយគត់ ដែល

$$a = qb + r, 0 \leq r < |b|$$

97. ចូរបង្ហាញថា បើ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ គេមានចំនួនគត់ q និង r តែមួយគត់ ហើយនិង $\varepsilon = \pm 1$ ដែល $-\frac{b}{2} < r \leq \frac{b}{2}$

98. ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ២ចំនួន ដែលមានរាង $4k+3$ ជាចំនួនដែលមានរាង $4k+1$។

99. ចូរបង្ហាញថា ការេនៃគ្រប់ចំនួនគត់សេស សល់សំនល់ ១ ពេលចែកនឹង៨។

100. ចូរបង្ហាញថា គ្មាន ៣ចំនួនគត់សេសបន្តបន្ទាប់គ្នា ដែល និមួយៗជាផលបូកការេនៃ២ចំនួន ធំជាង0ទេ។

101. តាង $n > 1$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា បើ មានមួយក្នុងចំនោម $2^n - 1, 2^n + 1$ ជាចំនួនបឋម នោះ មួយទៀតត្រូវតែជាចំនួនមិនបឋម។

102. ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $4n^2 + 1$ ចែកដាច់នឹង ១៣ និង នឹង ៥ផង។

103. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ $n > 11$ ទាំងអស់ សុទ្ធតែជាផលបូកនៃ២ចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនបឋម។

(ណែនាំ៖ ពិនិត្យ $n-6$ បើ n គូ និង $n-9$ បើ n សេស)

104. ចូរបង្ហាញថា ៣ មិនអាចចែកដាច់ n^2+1 ទេ។

105. ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ធម្មជាតិ x, y ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល

$$x(x+1) \mid y(y+1)$$

តែ x ចែកមិនដាច់ y និង $(x+1)$ ចែកមិនដាច់ y

និង x ចែកមិនដាច់ $y+1$ និង $(x+1)$ ចែកមិនដាច់ $y+1$

(ណែនាំ៖ ពិនិត្យករណី $x = 36k+14, y = (12k+5)(18k+7)$)

106. គណនារកគ្រប់ចំនួនបឋមដែលមានរាង n^3-1 ចំពោះចំនួនគត់ $n>1$។

ចំលើយ

$n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ ជាចំនួនបឋម។

ដោយ n^2+n+1 ធំជាង១ ជានិច្ចនោះ ដើម្បីអោយ n^3-1 ជាចំនួនបឋម មានតែ $n-1=1,\ n=2$ ។

ករណី $n=2$ យើងមាន $n^3-1=7$ ជាចំនួនបឋម។

107. ចូរបង្ហាញថា n^4+4 ជាចំនួនបឋម តែក្នុងករណី $n=1$ ប៉ុណ្ណោះ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ ។

ចំលើយ

$$n=1 \qquad n^4+4=5$$ ជាចំនួនបឋម។

ពិនិត្យ

$$\begin{aligned} n^4+4 &= n^4+4n^2+4-4n^2 \\ &= \left(n^2+2\right)^2-(2n)^2 \\ &= \left(n^2+2-2n\right)\left(n^2+2+2n\right) \\ &= \left((n-1)^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right) \end{aligned}$$

កត្តានិមួយៗ ធំជាង ១ ចំពោះ $n>1$ ដូច្នេះ n^4+4 មិនអាចជាចំនួនបឋមបានទេ។

108. គណនារកគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 1$ ដែល n^4+4^n ជាចំនួនបឋម។

ចំលើយ

បើ កន្សោមខាងលើ ជាចំនួនបឋម នោះ វាត្រូវតែជាចំនួនសេស ហើយនាំអោយ n សេស។

$n=1 \qquad n^4+4^n=5$ ជាចំនួនបឋម

ករណី $n\geq 3$

$$\begin{aligned} n^4+4^n &= n^4+2n^2 2^n+2^{2n}-2n^2 2^n \\ &= \left(n^2+2^n\right)^2-\left(n.2^{(n+1)/2}\right)^2 \\ &= \left(n^2+2^n+n.2^{(n+1)/2}\right)\left(n^2+2^n-n.2^{(n+1)/2}\right) \end{aligned}$$

យើងឃើញថា ករណី $n\geq 3$ ជាចំនួនសេស នោះn^4+4^n អាចបំបែកជាផលគុណនៃចំនួនគត់២ ដែលធំជាង១ ដូច្នេះ វាមិនអាចជាចំនួនបឋមទេ។

109. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N},\ n^2$ ចែកដាច់ $(n+1)^n - 1$ ។

ចំលើយ

បើ $n=1$ នោះវាពិត។

សន្មតថា $n>1$ ។ តាមរូបមន្តទ្វេធាតុ

$$(n+1)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^k$$

ហើយគ្រប់តួទាំងអស់របស់ផលបូកនេះ ចែកដាច់នឹង n^2 ទាំងអស់។

110. ចូរបង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនសេសបឋម ហើយបើ $\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ នោះ p ចែក a ដាច់។

ចំលើយ

តំរៀបផលបូកជា

$$\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(p-1)/2}+\frac{1}{(p+1)/2}\right)$$

យើងមាន

$$1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}=\frac{p}{2(p-2)}$$

…………………

ដូច្នេះ ផលបូករបស់ប្រភាគនេះ មានភាគយកស្មើ p ។ តួនិមួយៗមានភាគយក តូចជាង p ។ ដោយ p ជាចំនួនបឋម នោះ p មិនអាចសំរួលបានទេ នៅក្នុងផលបូកនេះ។ ដូច្នេះ p ចែក a ដាច់។

111. ចូរបង្ហាញថា $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}\right)$

ចំលើយ

បើ $x = y$ យើងទាញបាន $0 = 0$ ពិត

បើ $xy = 0$ យើងទាញបាន មាន x រឺ y ដែល $= 0$ ។សន្មតថា $y = 0$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $x^n = x^n$ ពិត។

យើងសន្មតថា $x \neq y, xy \neq 0$ ។តាមសមភាព

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^n - 1}{a-1},\ a \neq 1$$

ដោយតាង $a = x/y$ យើងទាញបានថាសំនើខាងលើពិត។

ដោយមិនបាច់ គណនាយើងឃើញថា $8767^{2345} - 8101^{2345}$ ចែកដាច់នឹង 666 ។

112. (ហុងគ្រី ១៨៩៩)

ចូរបង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ចំលើយ

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើ

$2903^n - 803^n$ ចែកដាច់នឹង $2903 - 803 = 7.300$

$261^n - 464^n$ ចែកដាច់នឹង $261 - 464 = 7.(-29)$

មានន័យថា កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង 7 ។

ដូចគ្នា ដែរ

$2903^n - 464^n$ ចែកដាច់នឹង $2903 - 464 = 9.271$

$261^n - 803^n$ ចែកដាច់នឹង $261 - 803 = -2.271$

មានន័យថា កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង 271 ។

ដោយ 7 និង 271 មិនមានកត្តាបឋមរួមគ្នា នោះ កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង $7.271 = 1897$ ។

113. **គេដឹងថា 1002004008016032 មានកត្តាបឋម $p > 250000$ ។ ចូរគណនាកត្តាបឋមនេះ។**

ចំលើយ

តាង $a = 10^3, b = 2$ $1002004008016032 = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$

$$= \frac{a^6 - b^6}{a - b}$$

$$= (a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$= 1002.1002004.998004$$

$$= 4.4.1002.250501.k$$

ដែល $k < 250000$ ។ ដូចនេះ $p = 250501$ ។

114. **បើ x, y, z, n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \ge z$ នោះ ទំនាក់ទំនង $x^n + y^n = z^n$ មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ។**

ចំលើយ

យើងដឹងថា បើ ទំនាក់ទំនង $x^n + y^n = z^n$ ពិតចំពោះ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x, y, z, n ណាមួយ នោះ $x < z$ និង $y < z$ ។ តាមលក្ខណៈ ស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x < y$ ។

$$z^n - y^n = (z-y)\left(z^{n-1} + yz^{n-2} + ... + y^{n-1}\right)$$

$$\ge 1.nx^{n-1} > x^n$$

ដូច្នេះ ផ្ទុយពីសមភាព $x^n + y^n = z^n$ ។

115. **ចូរបង្ហាញថា បើ n សេស នោះ**

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + ... - xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$$

ដូច្នេះ បើ n សេស នោះ $x + y$ ចែកដាច់ $x^n + y^n$ ។

ចំលើយ

ជំនួស $-y$ ទៅក្នុង y នៅក្នុងរូបមន្ត $x^n - y^n$ ហើយដោយដឹងថា $(-y)^n = -y^n$ បើ n សេស។

116. ចូរបង្ហាញថា 1001 ចែកដាច់ $1^{1993}+2^{1993}+3^{1993}+...+1000^{1993}$

ចំលើយ

យើងមាន

$1^{1993}+1000^{1993}=(1+1000)(...)$ ចែកដាច់នឹង 1001

$2^{1993}+999^{1993}=(2+999)(...)$ ចែកដាច់នឹង 1001

....

$500^{1993}+501^{1993}=(500+501)(...)$ ចែកដាច់នឹង 1001

ដូច្នេះ ផលបូកវាចែកដាច់នឹង 1001 ។

117. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយ គេមាន ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x មួយទៀត ដែលតួនិមួយៗរបស់ស្វ៊ីត $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1,...$ ចែកដាច់នឹង n ។

ចំលើយ

យក $x=2n-1$ យើងទាញបានសំនើខាងលើពិត។

118. ចូរបង្ហាញថា មានគូ (m,n) ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល m និង n មានកត្តាបឋមរួម ហើយ $(m-1)$ និង $(n-1)$ មានកត្តាបឋមរួមគ្នាដែរ។

ចំលើយ

យក $m=2^k-1,\ n=\left(2^k-1\right)^2, k=2,3,...$

យើងឃើញថា m,n មានកត្តាបឋមដូចគ្នា ហើយ

$$m-1=2\left(2^{k-1}-1\right)$$

$$n-1=2^{k+1}\left(2^{k-1}-1\right)$$

119. ចំនួនមែរសែន

ចូរបង្ហាញថា បើ 2^n-1 ជាចំនួនបឋម នោះ n ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ។

ចំលើយ

សន្មតថា n ជាចំនួនពហុគុណ ហើយ ថា d ជាតួចែករបស់ n ខុសពី១។ យើងមាន

$n=dd'$ និង

$$2^n-1=\left(2^d-1\right)\left(2^{d\left(d'-1\right)}+2^{d\left(d'-2\right)}+...+1\right)$$

ដោយ 2^d-1 ខុសពី១ នោះ 2^n-1 ជាចំនួនពហុគុណ។ ដូច្នេះ បើ n មិនមែនជាចំនួនបឋម

$\Rightarrow$ 2^n-1 មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ។

សំគាល់

បើ n ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow$ 2^n-1 អាចជាចំនួនបឋម រឺ មិនបឋម។

បើ 2^n-1 ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow$ n ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ។

120. (មូស្គូ ១៩៩៥)

ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ពហុគុណ n ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល n ចែកដាច់ $3^{n-1}-2^{n-1}$។

ចំលើយ

យើងមាន

$$3^{kd}-2^{kd}=\left(3^{d}-2^{d}\right)\left(3^{(k-1)d}+3^{(k-2)d}.2+\ldots+2^{(k-1)d}\right)$$

តាមសមភាពខាងលើ យើងទាញបានថា

បើ d ចែកដាច់ n នោះ 3^d-2^d ចែកដាច់ 3^n-2^n ។

(១)

បើ d ជាចំនួនពហុគុណ នោះ 3^d-2^d ក៏ជាចំនួនពហុគុណដែរ។

(២)

យើងនឹងបង្ហាញថា មាន d ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល ចែកដាច់ 3^d-2^d-1។ យើងយក $d=2^t$ ដូច្នេះយើងទាញបាន d ចែកដាច់ 2^d។ យើងត្រូវបង្ហាញថា d ចែកដាច់ 3^d-1 ទៀត។ យើងនឹងបង្ហាញតាមវិចារដោយកំនើន។

បើ $t=1$ នោះ $d=2$ ចែកដាច់ $3^2-1=8$ ពិត។ សន្មតថា ពិតចំពោះចំនួនគត់ t មួយ។ យើងមាន

$$3^{2^{t+1}}-1=\left(3^{2^t}-1\right)\left(3^{2^t}+1\right)$$

កត្តាទី១ចែកដាច់នឹង 2^t តាមកំនើន ដូច្នេះ សំនើពិត។ ដូច្នេះ យើងបានបង្ហាញថា មាន $d=2^t$ ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល ចែកដាច់ 3^d-2^d-1។

យក $n=3^d-2^d=3^{2^t}-2^{2^t}$ ។

ដោយ $d=2^t$ ជាចំនួនពហុគុណ នោះ $n=3^d-2^d$ ក៏ជាចំនួនពហុគុណដែរ(តាម(២))។
ដោយ d ចែកដាច់ $n-1$ នោះ 3^d-2^d ចែកដាច់ $3^{n-1}-2^{n-1}$(តាម(១))។
ដូច្នេះជាសរុប យើងបានបង្ហាញថា មាន $n=3^d-2^d=3^{2^t}-2^{2^t}$ ដែល $t\geq 1$ ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $n=3^d-2^d$ ចែកដាច់ $3^{n-1}-2^{n-1}$ ។

121. **ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន អាចសរសេរជារាង $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ បានទាំងអស់ ចំពោះចំនួនគត់ a,b,c,d វិជ្ជមាន។**

ចំលើយ

តាង r ជាចំនួនសនិទាន ដែល $\frac{1}{2}<r<2$ ។ តាង $r=\frac{m}{n}$ ។ យើងយក $a=2m-n, b=m+n, c=2n-m$ និង $d=m+n$ នោះ $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}=\dfrac{m}{n}=r$ **ជាចំនួនសនិទាន។**

ក្នុងករណីទូទៅ យើងសន្មតថា $r\geq 1$ ។ ដូច្នេះ គេមាន $n\geq 0$ ដែល

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3n}<r\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3n+3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}<r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{16}<2$$

ដូច្នេះ $r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}$ ជាចំនួនសនិទាននៅចន្លោះ $\frac{1}{2}$ និង 2 ។ តាមលទ្ធផលខាងលើ យើងទាញបាន

$$r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}=\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$$

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c និង d ណាមួយ។ យើងទាញបាន

$$r=\frac{\left(3^n a\right)^3+\left(3^n b\right)^3}{\left(2^n c\right)^3+\left(2^n d\right)^3}$$

យើងទាញបានថា សំនើពិត។

122. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៩២)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ a,b,c ដែល $1<a<b<c$ ហើយ ដែល

$(a-1)(b-1)(c-1)$

ចែកដាច់ $abc-1$។

ចំលើយ

យើងដឹងថា ផលធៀប $q=\dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ មិនអាចស្មើ 1 បានទេ ដូច្នេះ $q\geq 2$ ។ ដោយដឹងថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\geq 5$ យើងមាន $x-1\geq \dfrac{x}{\sqrt[3]{2}}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $a\geq 5$ យើងមាន

$$2(a-1)(b-1)(c-1)\geq abc>abc-1 \qquad (\text{ព្រោះ } c>b>a\geq 5)$$

ដូច្នេះ $abc-1$ មិនអាចចែកដាច់នឹង $(a-1)(b-1)(c-1)$ បានទេ។ ដូច្នេះ $2\leq a\leq 4$ ។ សន្មតថា $q=2$ ។ ដូច្នេះ $abc-1$ ជាចំនួនគូ មានន័យថា abc ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ a ត្រូវតែសេស ដូច្នេះ $a=3$ ។ សមីការទៅជា $4(b-1)(c-1)=3bc-1$ សមមូលនឹង $bc+5=4b+4c \Rightarrow (b-4)(c-4)=11 \Rightarrow b-4=1, c-4=11 \Rightarrow b=5$ និង $c=15$ ។

ពេលនេះ សន្មតថា $q \ge 3$ ។ បើ $a=2 \Rightarrow q(bc-b-c+1)=2bc-1 \Rightarrow$

$(q-2)bc+(q+1)=qb+qc \Rightarrow \left[(q-2)b-q\right]\left[(q-2)c-q\right]=q+2$

យើងមាន $b \ge 3$ ហើយបើ $c \ge 4 \Rightarrow (q-2)b-q \ge 2q-6$ និង

$(q-2)c-q \ge 3q-8$ ។ ដូច្នេះផលគុណ

$\left[(q-2)b-q\right]\left[(q-2)c-q\right] \ge (2q-6)(3q-8)$ ហើយយើងមាន

$(2q-6)(3q-8) > q+2$ ពេល $q \ge 4$ ។ ដូចនេះមានតែ $q=3$ ។ ករណីនេះ

$(b-3)(c-3)=5 \Rightarrow b=4$ និង $c=8$ ។

បើ $a=3 \Rightarrow 2q(bc-b-c+1)=3bc-1 \Leftrightarrow$

$(2q-3)bc+(2q+1)=2qb+2qc$ ។ ដោយ $b \ge 4 \Rightarrow$

$(2q-3)bc \ge (8q-12)c \ge 4qc > 2qc+2qb$ ដូច្នេះគ្មានចំលើយ។

បើ $a=4$ យើងសរសេរ $(3q-4)bc+(3q+1)=3qb+3qc$ ។ តែ $b \ge 4 \Rightarrow$

$(3q-4)bc \ge (12q-16)c > 6qc > 3qb+3qc$ ដូច្នេះគ្មានចំលើយទៀត។

ជាសរុប ចំលើយមានតែ $a=2, b=4, c=8$ និង $a=3, b=5, c=15$ ។

123. (ឥណ្ឌា ១៩៩៨)

គេអោយ M ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ តាង

$$S=\left\{n\in\mathbb{N}, M^2\leq n<\left(M+1\right)^2\right\}$$

ចូរបង្ហាញថា ផលគុណ ab ដែល a និង b ជាធាតុរបស់ S មានតំលៃខុសគ្នាពីរៗ។

ចំលើយ

សន្មតថា មានធាតុបួននៃ S ដែល $ab=cd$ ។ តាង $A=M^2+M$, $a=A+x, b=A+y,\ c=A+z$ និង $d=A+t$ ដែល x,y,z និង t មានតំលៃដាច់ខាតតូចជាង រឺស្មើ M ។ សមមភាពនេះ អាចសរសេរជា

$$\left(x+y\right)A+xy=\left(z+t\right)A+zt$$

បើ យើងមាន $x+y=z+t$ នោះ $xy=zt$ នោះ គូ $\{x,y\}$ និង $\{z,t\}$ ជាគូតែមួយ ដូច្នេះ យើងមិនចាំបាច់បកស្រាយអ្វីបន្តទៀតទេ។ ក្រៅពីនេះ

$$2M^2\geq\left|xy-zt\right|=\left|\left(x+y\right)-\left(z+t\right)\right|.\left|A\right|>\left|\left(x+y\right)-\left(z+t\right)\right|.M^2$$

ដូច្នេះមានតែ $x+y$ និង $z+t$ ខុសគ្នាមួយឯកតាគត់ ឧទាហរណ៍ បើ $x+y=z+t+1$ នោះ $xy=zt-A$

រួចហើយ x និង y ជាឫសរបស់ពហុធា

$$X^2-\left(z+t+1\right)X+\left(zt-A\right)$$

ពហុធានេះមានឫស $\dfrac{z+t+1\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

ដែល $\Delta=\left(z+t+1\right)^2-4zt+4A\geq 4A=\left(z-t+1\right)^2+4d\geq 4M^2$

$\Delta=4M^2$ កើតមានលុះត្រាតែ $d=M$ និង $z-t+1=0$ ព្រោះ $d\geq M^2$ ។ ដូច្នេះ ទាល់តែ $t=-M$ និង $z=-M-1$ មិនអាចព្រោះ $\left|z\right|\leq M$ ។ ដូច្នេះ $\Delta>4M^2$ ។

បើ $z+t+1\geq 0$ នោះ $\frac{z+t+1+\sqrt{\Delta}}{2}>M$

បើ $z+t+1\leq 0$ នោះ $\frac{z+t+1-\sqrt{\Delta}}{2}<-M$

ក្នុងករណីទាំងពីរ យើងមាន x និង y មានតំលៃដាច់ខាតធំជាង M ដែលករណីនេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។

124. **តាង (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃ ចំនួនគត់ពីរ។ យើងសន្មតថា ស្វ៊ីត (a_n+b_n) និង (a_nb_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនថេរ c មួយដែលចំពោះគ្រប់ n យើងមាន $a_n=c$ រឺ $b_n=c$ ។**

ចំលើយ

តាង $a_n+b_n=\alpha+nr$ និង $a_nb_n=\beta+ns$ ចំពោះចំនួនគត់ α,β,r និង s ។ r និង s ជាផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីត (a_n+b_n) និង (a_nb_n) រៀងគ្នា។ បើ $r=0$ នោះ a_n+b_n ជាស្វ៊ីតថេរ។

ចំពោះគ្រប់ n គេមាន a_n និង b_n ជាចំលើយរបស់សមីការ

$$X^2-(\alpha+nr)X+(\beta+ns)=0$$

ដូច្នេះ ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta_n=(\alpha+nr)^2-4(\beta+ns)$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ការេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ ។ យើងមានសមភាព

$$r^2\Delta_n=\left(nr^2+\alpha r-2s\right)^2+d$$

ដែល $d=-4s^2+4rs\alpha-4\beta r^2$ មិនអាស្រ័យនឹង n ។ ដូច្នេះបើ $r\neq 0$ ចំពោះ n ធំគ្រប់គ្រាន់ណាមួយ នោះ យើងមានវិសមភាព

$$\left(nr^2+\alpha r-2s-1\right)^2<r^2\Delta_n<\left(nr^2+\alpha r-2s+1\right)^2$$

តែដោយ $r^2\Delta_n$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ការេ ចំពោះគ្រប់ n (ទោះធំគ្រប់គ្រាន់រឺមិនគ្រប់គ្រាន់) នោះ

$$r^2\Delta_n=\left(nr^2+\alpha r-2s\right)^2$$

ដូច្នេះ $d=0$ ។ ដូច្នេះសមីការខាងលើ មានរឺស ស្មើនឹង $c=\frac{s}{r}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ n យើងមាន $a_n=c$ រឺ $b_n=c$ ។

125. **គេអោយ $a<b\le c<d$ ជាចំនួនគត់ ដែល $ad=bc$ និង $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$។ ចូរបង្ហាញថា a ជាចំនួនការេ។**

ចំលើយ

យើងមាន $d-a>c-b$ ដោយលើកជាការេ យើងទាញបាន

$a^2-2ad+d^2>c^2-2bc+b^2$ ។ បូក $4ad=4bc$ ចូលអង្គទាំង២ យើងទាញបាន

$(a+d)^2>(b+c)^2$ ដូច្នេះ $a+d\ge b+c+1$ ។

បើ $\sqrt{d}-\sqrt{a}<1$ នោះ យើងទាញបាន

$$a+d<1+2\sqrt{ad}=1+2\sqrt{bc}\le 1+b+c\le a+d \quad \text{មិនអាច}$$

ដូច្នេះ $\sqrt{d}-\sqrt{a}=1$ ។ ដូច្នេះ $a+d=1+2\sqrt{ad}=1+2\sqrt{bc}\le 1+b+c\le a+d$

ដូច្នេះសមភាពអាចកើតមាន ពេល $b=c$ ដូច្នេះ $ad=b^2$ ។ តាង p ជាតួចែកបឋមរួមរបស់ a និង d ។ ដូច្នេះ p ត្រូវតែចែកដាច់ b ហើយ p ចែកដាច់ $a+d=2b+1$ មិនអាចទេ បើ $p\ne 1$ ។ ដូច្នេះ a បឋមនឹង d ។ ដោយផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ នោះ a ក៏ត្រូវតែជាចំនួនការេដែរ។

126. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៨៣)

គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b និង c បឋមនឹងគ្នា២ៗ។ ចូរបង្ហាញថា $2abc-ab-bc-ca$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $xbc+yca+zab$ បាន ដែលក្នុងនោះ x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានរឺសូន្យ ។

ចំលើយ

ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា $2abc-ab-bc-ca$ មិនអាចសរសេរជារាង $xbc+yca+zab$ បានទេ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់នូវអំនអំនាងនេះ ជាដំបូងយើងសន្មតថា អាចសរសេរបានសិន មានន័យថា

$$2abc-ab-bc-ca=xbc+yca+zab$$

$$\Rightarrow \quad (x+1)bc=2abc-ab-ca-yca-zab$$

ដោយ a,b និង c បឋមនឹងគ្នា២ៗ នោះ a ត្រូវចែកដាច់ $x+1$ ។ $x+1$ មិនអាចស្មើសូន្យបានទេ ព្រោះ $x\ge 0$ ។ ដូច្នេះ $x\ge a-1$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបានថា $y\ge b-1$ និង $z\ge c-1$ ។ តែបើដូច្នេះ នោះ

$$xbc+yca+zab\ge (a-1)bc+(b-1)ac+(c-1)ab$$

$$=3abc-bc-ac-ab>2abc-bc-ac-ab$$

ផ្ទុយពីការសន្មត។ ដូច្នេះ $2abc-ab-bc-ca$ មិនអាចសរសេរជារាង $xbc+yca+zab$ បានទេ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលធំជាង $2abc-ab-bc-ca$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាងខាងលើបានទាំងអស់។

យើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែល ធំជាង $ab-a-b$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $xb+ya$ បានទាំងអស់។ ដោយ a បឋមនឹង b នោះគ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ពេលចែកនឹង

a មានសំនល់មួយក្នុងចំណោម $\{0,b,2b,...,(b-1)a\}$ ។ បើ $r>(a-1)b-a$ នោះ r ចែកនឹង a សល់ xb ដែល $0\le x\le(a-1)$ ។ ដោយ $r>xb-a$ នោះ $r=xb+ya$ ដែល $y\ge 0$ ។ ដូច្នេះមានន័យថា គ្រប់ចំនួនគត់ធំជាង $ab-a-b$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $xb+ya$ បានទាំងអស់។

ដោយដឹងថា c និង ab បឋមនឹងគ្នា នោះគ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលធំជាង $abc-ab-c$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $tc+zab$ បានទាំងអស់ ដែល t និង z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ តាង $d=tc+zab$ ។ យើងមាន $ab-a-b+1+t$ ធំជាង $ab-a-b$ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរជារាងខាងក្រោមបាន

$$ab-a-b+1+t=xb+ya$$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន x និង y ខ្លះ។ យើងទាញបាន

$$xbc+yac+zab=(abc-ac-bc+c)+(tc+zab)=abc-ac-bc+c+d$$

យើងមាន $d>abc-ab-c$ នោះ

$$abc-ac-bc+c+d>abc-ac-bc+c+abc-ab-c$$

$$=2abc-ab-bc-ca$$

យើងបានបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលមានរាង $abc-ac-bc+c+d>2abc-ab-bc-ca$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង ដែលអោយបាន។

127.(គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៨៤)

តាង a,b,c និង d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ដែល $a<b<c<d$, $ad=bc$ និង $a+d=2^k$, $b+c=2^m$ ដែល k,m ជាចំនួនគត់ពីរ។ ចូរបង្ហាញថា $a=1$។

ចំលើយ

យើងមាន

$$(b-a)(b+a)=b^2-a^2=\left(b^2+bc\right)-\left(a^2+ad\right)=2^m b-2^k a$$

ម៉្យាងវិញទៀត យើងមាន $k>m$ ព្រោះ $a+d>b+c$ ពីព្រោះ $a(a+d-b-c)=(a-b)(a-c)>0$ ។ ដូច្នេះ $(b-a)(b+a)$ ជាពហុគុណ នៃ 2^m ។ ដោយ b សេស នោះ $(b-a)+(b+a)=2b$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ ៤ទេ ដូច្នេះ $b-a$ និង $b+a$ មិនអាចជាពហុគុណនៃ ៤ទាំង២បានទេ។ យើងទាញបានថា មានមួយក្នុងចំនោមចំនួនពីរនេះ ចែកដាច់នឹង 2^{m-1} ។ តែ

$$0<b-a<b<\frac{b+c}{2}=2^{m-1}$$

ដូច្នេះ មានតែ $(a+b)$ ជាពហុគុណ នៃ 2^{m-1} ។ យើងមានវិសមភាពមួយផ្សេងទៀត

$$b+a<b+c=2^m$$

ដូច្នេះ $b+a=2^{m-1}$ ។

បើ d ជាតួចែករួមរបស់ a និង របស់ b នោះ d ត្រូវតែចែកដាច់ $a+b$ ដូច្នេះវាត្រូវតែជាចំនួនស្វ័យគុណគោល២។ ដោយ a និង b សុទ្ធតែជាចំនួនសេសទាំង២ នោះ $d=1$ មានន័យថា a និង b បឋមនឹងគ្នា។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងបង្ហាញថា a និង c បឋមនឹងគ្នា ដោយដឹងថា $c-a=(c+b)-(b+a)=2^m-2^{m-1}=2^{m-1}$ ។

ជាបញ្ចប់ a ចែកដាច់ bc ហើយបឋមនឹង b និង នឹង c ។ ដូច្នេះ $a=1$ ។

128. ចូរបង្ហាញថា ចំនួនគត់ $\underbrace{1...1}_{91\times1}$ ជាចំនួនមិនបឋម។

129. ចូរបង្ហាញថា $1^{99}+2^{99}+3^{99}+4^{99}$ ចែកដាច់នឹង 5។

130. ចូរបង្ហាញថា បើ $|ab|\neq 1$ នោះ a^4+4b^4 ជា ចំនួនមិនបឋម។

131. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

$\underbrace{1.....1}_{1\times 2n}-\underbrace{2....2}_{2\times n}$ ជាការេនៃចំនួនគត់។

132. តាង $0\leq a<b$

ក– ចូរបង្ហាញថា $b^n\left((n+1)a-nb\right)<a^{n+1}$

ខ– ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $n=1,2,...$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\qquad n=1,2,...$$

គ– ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}>(n+1)a$$

ឃ– ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\quad n=1,2,...$$

133. បើ a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$$

ជាចំនួនគត់ តែចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយចំនួនប៉ុណ្ណោះ។

134. ចូរបង្ហាញថា 100 ចែកដាច់ $11^{10}-1$

135. តាង A និង B ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ២ ដែល មានចំនួនខ្ទង់ដូចគ្នា ហើយ $A>B$។ សន្មតថា A និង B មានច្រើនជាងពាក់កណ្ដាលនៃចំនួនខ្ទង់របស់វា ផ្នែកខាងឆ្វេងដៃ មានលេខដូចគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា

$$A^{1/n}-B^{1/n}<\frac{1}{n}$$

ចំពោះ គ្រប់ $n=2,3,4....$។

136. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់តួទាំងអស់របស់ស្វ៊ីតខាងក្រោម

$$49,4489,444889,44448889,...,\underbrace{4...4}_{4\times n}\ \underbrace{8...8}_{8\times(n-1)}\ 9,$$

សុទ្ធតែជាការេនៃចំនួនគត់។

137. (ប៉ូឡូញ) ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិគូ នោះ 13^n+6 ចែកដាច់នឹង ៧។

138. ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនតែមួយគត់ ដែលជាការេនៃចំនួនគត់ ហើយ ស្មើនឹង ផលគុណ នៃ ៤ចំនួនគត់សេសបន្តបន្ទាប់គ្នា។ ចូរគណនាចំនួននេះ។

139. ចូរបង្ហាញថា $2222^{5555}+5555^{2222}$ ចែកដាច់នឹង ៧។

(ណែនាំ៖ ពិនិត្យលើ

$$2222^{5555}+4^{5555}+5555^{2222}-4^{2222}+4^{2222}-4^{5555}$$)

140. ចូរបង្ហាញថា បើ $a^n+1, 1<a\in\mathbb{N}$ ជាចំនួនបឋម នោះ a ជាចំនួនគត់គូ ហើយ n ជាស្វ័យគុណនៃ ២។

ចំនួនបឋមដែលមានរាង $2^{2^k}+1$ មានឈ្មោះថា ចំនួនបឋមហ្វែរម៉ា (Fermat)។

141. ចូរបង្ហាញថា បើ $a^n-1, 1<a\in\mathbb{N}$ ជាចំនួនបឋម នោះ $a=2$ ហើយ n ជាចំនួនបឋម។

142. តើមាន ចំនួនបឋម ចំនួនប៉ុន្មាន ក្នុងចំនោម ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដោយពេលសរសេរនៅក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់ ខ្ទង់និមួយៗ របស់វា ជាលេខ ១ រឺ 0 ដោយឆ្លាស់គ្នា ហើយ ចាប់ផ្តើមនិង បញ្ចប់ដោយលេខ១?។

143. ចូររកតំលៃតូចបំផុតរបស់ $36^k-5^k, k=1,2,...$

144. ចូររកគ្រប់បណ្តាចំនួនបឋម ដែលមានរាង n^3+1។

145. ចូររករូបមន្ត នៃផលគុណ

$$P=(1+2)\left(1+2^2\right)\left(1+2^{2^2}\right)...\left(1+2^{2^n}\right)$$

ដោយប្រើរូបមន្តនេះ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n, $2^{2^n}+1$ ចែកដាច់ $2^{2^{2^n}+1}-2$។

146. គេអោយចំនួនពិត $a>1$។ ចូរសំរួលកន្សោម

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

147. តាង a,b,c,d ជាចំនួនពិត ដែល

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$$

ចូរបង្ហាញថា $a=b=c=d$។

148. តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\le 4(ab+bc+ca)$$

149. តាង a,b,c,d ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែល $a+b+c+d=a^3+b^3+c^3+d^3=0$

ចូរបង្ហាញថា មានគូមួយនៃ a,b,c,d ត្រូវតែបូកគ្នាស្មើ 0។

150. ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ ៤ចំនួនគត់ធម្មជាតិបន្តបន្ទាប់គ្នា មិនអាចជា ការេនៃ ចំនួនគត់ទេ។

(ណែនាំ៖ ពិនិត្យលើ $\left(n^2+n-1\right)^2$)

151. តាង $k\ge 2$ ជាចំនួនគត់មួយ។ ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ

n^k អាចសរសេរជា ផលបូកនៃ បណ្តា n ចំនួនគត់សេសបន្តបន្ទាប់គ្នា។

152. ចូរបង្ហាញថា

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

ស្មើនឹង $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$

153. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៧៩) បើ a,b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល

$$\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

ចូរបង្ហាញថា 1979 ចែកដាច់ a ។

154. (ប៉ូឡូញ) ចំនួនត្រីកោណ ជាចំនួនមួយ ដែល មានរាង $1+2+\ldots+n, n\in\mathbb{N}$។

ចូរបង្ហាញថា គ្មានលេខណាមួយក្នុងចំនោម $2,4,7,9$ អាចជា លេខខ្ទង់ខាងចុង របស់ចំនួនត្រីកោណទេ។

155. ចូរបង្ហាញថា មានរាប់មិនអស់នូវបណ្តាចំនួនត្រីកោណ ដែលជាការេនៃចំនួន គត់។

156. សន្មតថា ចំនួនគត់ n អាចសរសេរជាផលបូកនៃចំនួនត្រីកោណ២

$$n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}$$

ចូរសរសេរ $4n+1$ ជាផលបូកការេនៃពីរចំនួនគត់ $4n+1=x^2+y^2$

ដែល x និង y សរសេរជាអនុគមន៍នៃ a និង b។

ច្រាសមកវិញ ចូរបង្ហាញថា បើ $4n+1=x^2+y^2$ នោះ n គឺជាផលបូកនៃ ២ចំនួនត្រីកោណ។

157. (ប៉ូឡូញ) ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំនោម $n,n+1,\ldots,n+9$ ដែល n ជាចំនួនគត់ ធម្មជាតិ តែងតែមានយ៉ាងហោចណាស់មួយ ហើយយ៉ាងច្រើន ៤ ដែលចែក មិនដាច់នឹង $2,3,5,7$ ។

158. ចូរបង្ហាញថា បើ k ជាចំនួនសេស នោះ $1+2+...+n$
ចែកដាច់ $1^k+2^k+...+n^k$

159. តើមានរឺទេ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន p មួយ ដែល

$$p^4+(p+1)^4+(p+2)^4+(p+3)^4=(p+4)^4$$?។

160. និយមន័យ– ភាពសមមូល

សរសេរថា $a \equiv b \pmod{n}$ អានថា a សមមូល b តាម(modulo) n ។

មានន័យថា n ចែកដាច់ $(a-b)$ ។

រឺមានន័យម៉្យាងទៀតថា a និង b មានសំនល់ដូចគ្នា ពេលចែកជាមួយ n ។

ឧទាហរណ៏ $15 = 7\times 2+1 \quad \Rightarrow 15 \equiv 1 \pmod{7}$ ។

161. ទ្រឹស្តីបទ

តាង $a,b,c,d,m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^*$ ដែល $a \equiv b \pmod{m}$ និង $c \equiv d \pmod{m}$ ។

នោះ

១– $a+c \equiv b+d \pmod{m}$

២– $a-c \equiv b-d \pmod{m}$

៣– $ac \equiv bd \pmod{m}$

៤– $a^k \equiv b^k \pmod{m}$

៥– បើ f ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ នោះ

$f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយ $a \equiv b \pmod{m}$ និង $c \equiv d \pmod{m}$ នោះ គេអាចរកបាន

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ដែល

$$a = b + k_1 m \text{ និង } c = d + k_2 m \text{ ។}$$

ដូច្នេះ

$$a \pm c = b \pm d + (k_1 + k_2)m$$

$$ac = bd + m(k_1 d + k_2 b)$$

ដូច្នេះយើងទាញបានលក្ខណៈលេខ១១ ដល់លេខ១៣។ ចំពោះ លក្ខណៈលេខ១៤ យើងស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើ លក្ខណៈលេខ១៣។

លក្ខណៈលេខ១៥ យើងស្រាយបញ្ជាក់ ដោយប្រើ លក្ខណៈលេខ១៤។

162. គណនាសំនល់នៃវិធីចែក 6^{1987} នឹង 37

ចំលើយ

$6^2 \equiv -1 \pmod{37}$ ។ ដូច្នេះ

$6^{1987} = 6.6^{1986} = 6.\left(6^2\right)^{993} \equiv 6(-1)^{993} = -6 \equiv 31 \pmod{37}$ ។

ដូច្នេះសំនល់គឺ 31 ។

163. ចូរបង្ហាញថា ៧ ចែកដាច់ $3^{2n+1}+2^{n+2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ចំលើយ

$$3^{2n+1} = 3.9^n \equiv 3.2^n \pmod{7}$$

$$2^{n+2} \equiv 4.2^n \pmod{7}$$

ដូច្នេះ

$$3^{2n+1}+2^{n+2} \equiv 7.2^n \equiv 0 \pmod{7}$$

164. ចូរបង្ហាញថា 641 ចែកដាច់ $\left(2^{32}+1\right)$

ចំលើយ

ដោយ $641 = 2^7.5 + 1 = 2^4 + 5^4$ (១)

(១) $\Rightarrow \quad 2^7.5 \equiv -1 \pmod{641}$

$\Rightarrow \quad \left(2^7.5\right)^4 \equiv (-1)^4 \pmod{641}$

$\Rightarrow \quad 5^4.2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ (២)

(១) $\Rightarrow \quad 5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$ (៣)

(២) និង (៣) $\Rightarrow \left(-2^4\right)\left(2^{28}\right) \equiv 1 \pmod{641}$

$\Rightarrow \quad \left(2^{32} + 1\right) \equiv 0 \pmod{641}$

$\Rightarrow \quad 641 \mid \left(2^{32} + 1\right)$

165. ចូរគណនា តំលៃសមមូលរបស់ចំនួនការេ $(\mathrm{mod}\,13)$ ។

ចំលើយ

សំនួរគឺចង់បាន $r^2 \equiv ? \pmod{13}$ ។

យើងមាន $r^2 \equiv (13 - r)^2 \pmod{13}$ ។

$0^2 \equiv 0 \pmod{13}$

$1^2 \equiv 1 \pmod{13}$

$2^2 \equiv 4 \pmod{13}$

$3^2 \equiv 9 \pmod{13}$

$4^2 \equiv 3 \pmod{13}$

$5^2 \equiv 12 \pmod{13}$

$6^2 \equiv 10 \pmod{13}$

$$7^2 \equiv (13-7)^2 = 6^2 \equiv 10 \pmod{13}$$

$$8^2 \equiv (13-8)^2 = 5^2 \equiv 12 \pmod{13}$$

....

ដូច្នេះ ចំនួនការេ សមមូលនឹង $0,1,4,9,3,12,10 \pmod{13}$

166. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ដែល $x^2 - 5y^2 = 2$

ចំលើយ

បើ $x^2 = 2 + 5y^2$ នោះ $x^2 \equiv 2 \pmod 5$ ។ ២ មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់ទេ

ដូច្នេះ វាមិនអាចសមមូលនឹងចំនួនការេមួយ $\pmod 5$ ទេ។

167. ចូរបង្ហាញថា 7 ចែកដាច់ $\left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right)$

ចំលើយ

$$2222 \equiv 3 \pmod 7$$

$$5555 \equiv 4 \pmod 7$$

$$3^5 \equiv 5 \pmod 7$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} 2222^{5555} + 5555^{2222} &\equiv 3^{5555} + 4^{2222} \pmod 7 \\ &\equiv \left(3^5\right)^{1111} + \left(4^2\right)^{1111} \pmod 7 \\ &\equiv 5^{1111} - 5^{1111} \pmod 7 \\ &\equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

168. គណនាលេខខ្ទង់រាយរបស់ 7^{7^7}

ចំលើយ

លេខខ្ទង់រាយរបស់ 7^{7^7} ស្មើនឹង $7^{7^7} \pmod{10}$ ។

$$7^2 \equiv -1 \pmod{10}$$

$$7^3 = 7.7^2 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$7^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$7^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$7^7 = \left(7^2\right)^3 .7 \equiv 3 \pmod{4} \quad \Rightarrow \text{មានចំនួនគត់ } t, \text{ ដែល } 7^7 = 3 + 4t$$

$$7^{7^7} = 7^{4t+3} = \left(7^4\right)^t .7^3 \equiv 1^t.3 \equiv 3 \pmod{10}$$

ដូច្នេះលេខខ្ទង់រាយរបស់ 7^{7^7} គឺ ៣។

169. ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $2^n + 27$ ចែកដាច់នឹង៧។

ចំលើយ

យើងមាន

$$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1, 2^4 \equiv 2, 2^5 \equiv 4, 2^6 \equiv 1 \bmod 7$$

ដូច្នេះ $2^{3k} \equiv 1 \bmod 7$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ។ ដូច្នេះ

$$2^{3k} + 27 \equiv 1 + 27 \equiv 0 \bmod 7$$

ដូច្នេះ មានន័យថាមាន $n = 3k$ ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $7 \mid 2^n + 27$ ។

170. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ឆ្នាំទាំងអស់ មានយ៉ាងហោចណាស់ ថ្ងៃសុក្រទី១៣ មួយដង។

ចំលើយ

សំនួរខាងលើសមមូលនឹងសំនើ "បើមាន ថ្ងៃសុក្រទី១៣ នោះត្រូវមានថ្ងៃអាទិត្យទី១"។

តារាងខាងក្រោមគណនាថ្ងៃទី១នៃខែនិមួយៗ តើត្រូវនឹងថ្ងៃអ្វី។

តាមរយៈ ជួរឈរ $\bmod 7$ យើងឃើញថា មានយ៉ាងណាស់ថ្ងៃអាទិត្យទី១មួយថ្ងៃដែរ។(នៅក្នុងជួរឈរនេះ មានន័យថា បើ ១ត្រូវជាថ្ងៃអាទិត្យនោះ ២ច័ន្ទ ៣អង្គា ៤ពុធ ៥ព្រហស្បតិ ៦សុក្រ ០សៅរ៍។ ដោយវាមានគ្រប់លេខពី០ ដល់ ៦ មានន័យថា យើងចង់យកលេខប៉ុន្មានជាថ្ងៃអាទិត្យក៏បាន)។

ខែ	លំដាប់ថ្ងៃ ដើមខែនិមួយៗ គិតពីដើមឆ្នាំមក	$(\bmod 7)$
មករា	១	១
កុម្ភៈ	៣២ (=១កុម្ភៈ)	៤
មិនា	៦០រឺ ៦១(=១មិនា)	៤រឺ៥
មេសា	៩១រឺ៩២	០រឺ១
ឧសភា	១២១រឺ១២២	២រឺ៣
មិថុនា	១៥២រឺ១៥៣	៥រឺ៦
កក្កដា	១៨២រឺ១៨៣	០រឺ១
សីហា	២១៣រឺ២១៤	៣រឺ៤

កញ្ញា	២៤៤រឺ២៤៥	៦រឺ០
តុលា	២៧៤រឺ២៧៥	១រឺ២
វិច្ឆិកា	៣០៥រឺ៣០៦	៤រឺ៥
ធ្នូ	៣៣៥រឺ៣៣៦	៦រឺ០

171. **តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y ដែល $x^3 = 2^y + 15$ រឺទេ?**

ចំលើយ

ចំនួនគូបសមមូលនឹង $0,1,6 \pmod 7$ ។ ចំនួនស្វ័យគុណនៃ២ សមមូលនឹង $1,2,4 \pmod 7$ ។ ដូច្នេះ $2^y + 15 \equiv 2,3,5 \bmod 7$ ។

ដូច្នេះអង្គទាំង២មិនអាចស្មើគ្នាទេ។

172. **ចូរបង្ហាញថា $2^k - 5, k = 0,1,,2,...$ មិនអាចសល់សំនល់១ពេលចែកនឹង៧ទេ។**

ចំលើយ

$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1 \bmod 7$

ហើយចេះតែបន្តចែកទៀត យើងនឹងទទួលបានសំនល់ដដែលក្នុងចំនោម៣នេះ។

ដូច្នេះ ពេលចែកនឹង៧, $2^k - 5$ អាចសល់សំនល់តែ $3,4,6$ ដូច្នេះ មិនអាចជា១ទេ។

173. (អាមេរិច ១៩៩៤)

ស៊ីតកើន $3,15,24,48,...$

មានតួរបស់វាជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលជាពហុគុណនៃ៣ ហើយដែលតូចជាងចំនួនការេចំនួនមួយឯកតា។ តើតួទី១៩៩៤ចែកនឹង១000 សល់សំនល់ប៉ុន្មាន?។

ចំលើយ

តួរបស់ស៊ីតកំនត់ដោយ $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ។ យើងមាន $3\,|\,n^2-1$ ។ ដោយ៣ជាចំនួនបឋម នោះ

$$n=3k\pm1, k=1,2,3,...$$

តាម $n=3k-1, k=1,2,3,...$ យើងទាញបានតួស៊ីត $3,24,...$ ដែលជាតួទីសេសរបស់ស៊ីត

តាម $n=3k+1, k=1,2,3,...$ យើងទាញបានតួស៊ីត $15,48,...$ ដែលជាតួទីគូរបស់ស៊ីត

យើងចង់បានតួទីគូគឺ $1994=2.997$ ដែលត្រូវជាតួទី៩៩៧នៃស៊ីត $n=3k+1$ ។

ដូច្នេះ $k=997$, $n=3.997+1$

$$(3.997+1)^2-1\equiv(3(-3)+1)^2-1$$

$$\equiv 8^2-1\equiv 63 \bmod 1000$$

ដូច្នេះសំនល់ដែលចង់បានគឺ 63 ។

174. (អាមេរិច ១៩៧៩)

ចូរកំនត់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $(n_1, n_2, ..., n_{14})$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម

$$n_1^4 + n_2^4 + ... + n_{14}^4 = 1599$$

ចំលើយ

គ្រប់ចំនួនស្វ័យគុណ៤ទាំងអស់ សមមូលនឹង 0រឺ១ ពេលចែកនឹង១៦។ មានន័យថា
$n_1^4 + n_2^4 + ... + n_{14}^4$ យ៉ាងច្រើនសមមូលនឹង១៤ តាម១៦។ តែ
$1599 \equiv 15 \bmod 16$ ។ ដូច្នេះ សមីការមិនអាចមានចំលើយទេ។

175. គណនាលេខខ្ទង់រាយរបស់

$$\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$$

ដែល $[x]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ x ។

ចំលើយ

តាង $a - 3 = 10^{100}$ ដូច្នេះ

$$\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right] = \left[\frac{(a-3)^{200}}{a}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{200}\binom{200}{k}a^{200-k}(-3)^k\right]$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{199}C_{200}^k a^{199-k}(-3)^k\right]$$

យើងមាន

$$a \equiv 3 \bmod 10$$

$$\sum_{k=0}^{200} C_{200}^{k}(-1)^k = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 3^{199}\sum_{k=0}^{199} C_{200}^{k}(-1)^k = -3^{199}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{199} C_{200}^{k} a^{199-k}(-3)^k &= \sum_{k=0}^{199} C_{200}^{k} a^{199-k} 3^k (-1)^k \\ &\equiv \sum_{k=0}^{199} C_{200}^{k} 3^{199-k} 3^k (-1)^k \bmod 10 \\ &\equiv 3^{199}\sum_{k=0}^{199} C_{200}^{k}(-1)^k \bmod 10 \\ &\equiv -3^{199} \equiv 3 \bmod 10\end{aligned}$$

លេខខ្ទង់រាយគឺ ៣។

176. **ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $a,b,c \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ គេមានចំនួនគត់ k ដែល n ចែកមិនដាច់ $(k+a),(k+b),(k+c)$ ទាំង៣ព្រមគ្នា។**

ចំលើយ

ចំនួនគត់$a,b,c \in \mathbb{Z}$ មានសំនល់យ៉ាងច្រើន ៣ប្រភេទ៣ខុសគ្នា ពេលចែកនឹង ចំនួនគត់ n មួយ។ ដោយ $n > 3$ នោះ ចំនួនគត់ទាំងឡាយពេលចែកនឹងn អាចមានសំនល់ច្រើនជាង៣ ប្រភេទទៅតាមតំលៃរបស់ចំនួនគត់នោះ(បើ $n = 3$ ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលធំជាងn អាច មានរាង $3m,\ 3m+1,\ 3m+2$ ដូច្នេះ ពេលចែកនឹង $n = 3$ អាចមានសំនល់៣ប្រភេទគឺ

$0,1,2$ ។ បើ $n=4$ នោះចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលធំជាងn អាចមានរាង $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$)។ ដូច្នេះ យើងអាចជ្រើសរើស ចំនួនគត់ k ដែល $(k+a)$, $(k+b)$,$(k+c)$ មានសំនល់៣យ៉ាងខុសគ្នា ហើយខុសពីសូន្យ ក្នុងចំណោមបណ្តាសំនល់ដែលមានច្រើនលើសពី៣ប្រភេទ ពេលចែកនឹង n ។ ឧទាហរណ៍ គេអោយ 8,12,16 និង $n=4$ ។ ពេលចែកនឹង $n=4$ គេអាចមានសំនល់៤យ៉ាង ដូចជា $0,1,2,3$ ។ យើងយក $k=1$ នោះ 9,13,17 សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង ៤ ទាំងអស់។

177. **ចូរបង្ហាញថា** $(kn)!\equiv 0\left(\bmod \prod_{r=0}^{n-1}(n+r)\right)$ **បើ** $n,k\in\mathbb{N}$, $n\ge k\ge 2$

ចំលើយ

$(kn)!=M(n-1)!n(n+1)\ldots(2n-1)$ ចំពោះចំនួនគត់ $M\ge 1$ណាមួយ។ ដូច្នេះសំនើពិត។

178. **តាង**

$$n!!=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

ចូរបង្ហាញថា $\forall n\in\mathbb{N}, n>3$, $\quad n!!\equiv n!\bmod(n-1)$

ចំលើយ

យើងមាន

$$n!-n!!=n(n-1)(n-2)!\left(1-\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$= (n-1)\left(m + \frac{(-1)^{n-1} n}{(n-1)} + \frac{(-1)^n}{n-1}\right)$$

$$= (n-1)\left(m + (-1)^n\right)$$

ដែល m ជាចំនួនគត់មួយ។ យើងទាញបានថាសំនើពិត។

179. ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{k=0}^{6n+2} \binom{6n+2}{2k} 3^k \equiv 0, 2^{3n+1}, -2^{3n+1} \bmod 2^{3n+2}$$

ពេលដែល n មានរាង $2k, 4k+3, 4k+1$ រៀងគ្នា។

ចំលើយ

ប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$2S = 2\sum_{k=0}^{3n+1} \binom{6n+2}{2k} 3^k = \left(1+\sqrt{3}\right)^{6n+2} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{6n+2}$$

បើ n សេស និង $a = 2+\sqrt{3}, b = 2-\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}\left(a^{3n+1} + b^{3n+1}\right) = \sum_{r=0}^{\frac{3n+1}{2}} \binom{3n+1}{2r} 2^{3n+1-2r} 3^r$$

$$\equiv 3^{(3n+1)/2} \bmod 4$$

$$\equiv (-1)^{(n-1)/2} \bmod 4$$

ដោយ $2S = 2^{3n+1}\left(a^{3n+1} + b^{3n+1}\right)$ និង ចំពោះចំនួនសេស n យើងមាន

$$S \equiv (-1)^{(n-1)/2}\, 2^{3n+1} \bmod 2^{3n+3}$$

បើ n គូ

$$\frac{1}{2}\left(a^{3n+1}+b^{3n+1}\right)=\sum_{2r\le 3n} C_{3n+1}^{2r+1}2^{3r+1}3^{3n-2r}$$

$$\equiv 2\left(6n+1\right)3^{3^n} \bmod 8$$

$$\equiv 4n+2 \bmod 8$$

ដូច្នេះ ចំពោះ n គូ, $S\equiv 2^{3n+2}2n+1 \bmod 2^{3n+4}$

180. គណនារកគ្រប់តំលៃរបស់ $n, 1\le n\le 25$ ដែល $n^2+15n+122$ ចែកដាច់នឹង ៦។

(ណែនាំ: $n^2+15n+122\equiv n^2+3n+2=\left(n+1\right)\left(n+2\right) \bmod 6$)

181. (អាមេរិច ១៩៨៣) តាង $a_n=6^n+8^n$។ គណនាសំនល់នៃវិធីចែក a_{83} នឹង 49។

182.(ប៉ូឡូញ) តើត្រូវជំនួស x និង y ដោយ តួលេខអ្វី ដើម្បីអោយ $30x0y03$ ចែកដាច់នឹង 13?។(តួលេខគឺ លេខ 0 ១ ...៩)

183. ចូរបង្ហាញថា បើ $9|\left(a^3+b^3+c^3\right)$ នោះ $3|abc$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a,b,c។

184. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ n ដែល $10|n^{10}+1$។

185. ចូរបង្ហាញថា បើ $a-b, a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4, \ldots$
សុទ្ធតែជាចំនួនគត់នោះ a និង b ត្រូវតែជាចំនួនគត់។

186. គណនា លេខខ្ទង់រាយរបស់ 3^{100}។

187.(អាមេរិច ១៩៩២) តើ សំនុំរង S របស់ $\{1,2,..,50\}$ មានទំហំធំបំផុត ត្រឹមប៉ុណ្ណា ដើម្បីអោយ
គ្មានគូណាមួយ នៃធាតុខុសគ្នារបស់ S មានផលបូកចែកដាច់នឹង 7?។

188. ចូរបង្ហាញថា សមីការ $x^2 - 7y = 3$ គ្មានរឹសជាចំនួនគត់ទេ។

189. ចូរបង្ហាញថា បើ $7 | \left(a^2 + b^2\right)$ នោះ $7 | a$ និង $7 | b$។

190. ចូរបង្ហាញថា សមីការ $x^2 + y^2 + z^2 = 800\ 000\ 007$ គ្មានរឹសជាចំនួនគត់ទេ។

191. ចូរបង្ហាញថា 7 ចែកដាច់$\left(4^{2^n} + 2^{2^n} + 1\right)$ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។

192. ចូរបង្ហាញថា 5 មិនអាចចែកដាច់ $\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} \binom{2n+1}{2k+1}$ ទេ។

193. ចូរបង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $\binom{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right]$ចែកដាច់នឹង p, $\forall n \geq p$។

$[x]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ x ។

194. តាងM, m ជាចំនួនគត់ ដែល $M \equiv m^2 \bmod 2^n$។ តើមានm^2 ចំនួនប៉ុន្មាន?។

195. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលមិនមែនជាពហុគុណនៃ ៣ សមមូលនឹងចំនួនស្វ័យគុណនៃ២ តាម 3^n។ឧទាហរណ៏
$7 \equiv 2^0 \bmod 3$,$17 \equiv 8 = 2^3 \bmod 3^2$។

196. កំនត់លេខ២ខ្ទង់ខាងចុងរបស់ 3^{100}។

197. (អាមេរិច ១៩៨៦) គណនាចំនួនគត់ $n > 1$ តូចបំផុត ដែល មធ្យមធរណីមាត្ររបស់ n ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង ជាចំនួនគត់។ (មធ្យមធរណីមាត្រ នៃ n ចំនួន $a_1, a_2, \ldots a_n$ កំនត់ដោយ $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$)

198. គណនាគ្រប់ចំនួនគត់ $a > 1, b, c$ និងបណ្តាចំនួនបឋម p, q, r ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$p^a = q^b + r^c$$

(a,b,c,p,q,r មិនចាំបាច់ត្រូវតែខុសគ្នានោះទេ)

199. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ M និង ចំនួនបឋម p គេមាន

$$M^8 \equiv 16 \bmod p$$

200. (អូឡាំពិកគណិតវិទ្យាអន្តរជាតិ១៩៧៥)តាង $a_1,a_2,a_3,...$ ជាស៊ីតកើននៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $s\ge 1$ គេមាន a_m ច្រើនរាប់មិនអស់ដែលគេអាចសរសេរជារាង

$$a_m = x.a_s + y.a_t$$

ដែលក្នុងនោះ x,y,t,s ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $t>s$ ។

201. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n>1$, ចូរបង្ហាញថា $n^n - n^2 + n - 1$ ចែកដាច់នឹង $(n-1)^2$ ។

202. តាង x និង $a_i, i=0,1,...,k$ ជាចំនួនគត់ណាមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\left(x^2+1\right)^{3i}$$

ចែកដាច់នឹង $x^2 \pm x+1$ លុះត្រាតែ $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_i$ ចែកដាច់នឹង $x^2 \pm x+1$ ហើយច្រាសមកវិញ។

203. តាង x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល

$$x^n + y^n = z^n$$

ចំពោះចំនួនគត់សេស $n\ge 3$, ចូរបង្ហាញថា z មិនអាចជាស្វ័យគុណនៃចំនួនបឋមទេ។

204. ទ្រឹស្តីបទ–ភាពចែកដាច់នឹង៩

ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយចែកដាច់នឹង៩ បើសិនជា ផលបូក
នៃលេខគ្រប់ខ្ទង់ទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា ចែកដាច់នឹង ៩។

ចំលើយ

តាង $n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0$

ដោយ $10 \equiv 1 \pmod 9$ នោះ យើងមាន $10^j \equiv 1 \pmod 9$

ដូច្នេះ $$\begin{aligned} n &= a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0 \\ &\equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_0 \qquad \pmod 9 \end{aligned}$$

205. (អាមេរិច ១៩៩២)

បណ្តាលេខមាន២ខ្ទង់ ចាប់ពី ១៩ ទៅ៩២ ត្រូវបានគេយកទៅសរសេរ
បន្តបន្ទាប់គ្នា ដើម្បីបង្កើតបានជាចំនួនគត់

$$192021222324...89909192$$

តើ ចំនួនស្វ័យគុណនៃ៣ ធំបំផុតស្មើប៉ុន្មាន ដែលចែកដាច់ចំនួននេះ?។

ចំលើយ

តាមទ្រឹស្តីបទនៃភាពចែកដាច់នឹង៩ ចំនួននេះ ចែកដាច់នឹង ៩ បើសិនជា

$$19 + 20 + 21 + ... + 92 = 37^2.3$$

ចែកដាច់នឹង៩ និង ច្រាសមកវិញ។ តែចំនួននេះ ចែកដាច់នឹង៣ តែចែកមិនដាច់នឹង៩ទេ។
មានន័យថា យ៉ាងច្រើន ចំនួននោះ ចែកដាច់នឹង ៣។

206. (អូឡាំពិច្បាដគណិតវិទ្យាអន្តរជាតិ១៩៧៥) ពេលគេសរសេរ 4444^{4444} នៅក្នុងប្រព័ន្ធគោល១០, គេទទួលបានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់វា ស្មើ A។ តាង B ផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់ A។ ចូរគណនា ផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់ B។ (A, B សរសេរនៅក្នុងប្រព័ន្ធគោល១០)។

ចំលើយ

យើងមាន $4444 \equiv 7 \bmod 9$

$$\Rightarrow \quad 4444^3 \equiv 7^3 \equiv 1 \bmod 9$$
$$\Rightarrow \quad 4444^{4444} = 4444^{3.1481}.4444$$
$$\equiv 1.7 \equiv 7 \bmod 9$$

តាង C ជាផលបូកលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់ B ។

តាមទ្រឹស្តីបទនៃភាពចែកដាច់នឹង៩ យើងទាញបាន

$$7 \equiv 4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \bmod 9$$

យើងមាន

$$4444 \log_{10} 4444 < 4444 \log_{10} 10^4 = 17776$$

មានន័យថា 4444^{4444} មានយ៉ាងច្រើន 17776 ខ្ទង់។ ដូច្នេះ ផលបូក តួលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់ 4444^{4444} យ៉ាងច្រើនស្មើ $9.17776 = 159984$

ដូច្នេះ $A \leq 159984$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់ ដែល ≤ 159984 ចំនួនដែលមានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់វាធំបំផុត គឺ99999 ដូច្នេះ $B \leq 45$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់ ដែល ≤ 45 ចំនួនដែលមានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់និមួយៗរបស់វាធំបំផុត គឺ 39 ដែលផលបូកតួលេខស្មើ ១២។ ដូច្នេះ ផលបូកតួលេខរបស់ B យ៉ាងច្រើនស្មើ ១២។

តែដោយ $C \equiv 7 \bmod 9$ នោះមានន័យថា $C = 7$ ។

207. តាង

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

ជាពហុធាមួយដែលមានដឺក្រេ n ហើយមានមេគុណជាចំនួនគត់។
បើ $a_0, a_n, f(1)$ សុទ្ធតែជាចំនួនសេស ចូរបង្ហាញថា $f(x)=0$ គ្មានរឹសជាចំនួនសនិទានទេ។

ចំលើយ

សន្មតថា $f(a/b)=0$ ដែល a និងb ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ នោះ

$$0=b^n f(a/b)=a_0b^n+a_1b^{n-1}a+\dots \quad +a_{n-1}ba^{n-1}+a_na^n$$

(*)

$\Rightarrow$អង្គខាងស្តាំត្រូវតែចែកដាច់នឹង a និង នឹងb ។

ដោយ a និងb ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ដូច្នេះ a ត្រូវតែចែកដាច់a_0 និង b ត្រូវតែចែកដាច់a_n ។

ដោយa_0, a_n សុទ្ធតែជាចំនួនសេស នោះ a និង b ត្រូវតែជាចំនួនសេសដែរ។ ដូច្នេះ

$$a_0b^n+a_1b^{n-1}a+\dots+a_{n-1}ba^{n-1}+a_na^n \qquad \equiv a_0+a_1+\dots+a_n \bmod 2$$

ដោយ $f(1)=a_0+a_1+\dots+a_n$ ជាចំនួនសេស នោះ

$$a_0+a_1+\dots+a_n \equiv 1 \bmod 2$$

ដូច្នេះ

$a_0b^n+a_1b^{n-1}a+\dots+a_{n-1}ba^{n-1}+a_na^n \equiv 1 \bmod 2$ តែផ្ទុយពី (*) រឺផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ នាំអោយ a/b មិនអាចជារឹសទេ។ នាំអោយសមីការគ្មានរឹសសនិទាន។

208. ចំនួនមានលេខn ខ្ទង់មួយ ជាលេខពិសេស បើសិនជាលេខទាំង n ខ្ទង់របស់វាជាតំរៀបរបស់សំនុំ $\{1,2,\dots,n\}$ ហើយ លេខ k ខ្ទង់ខាងដើមរបស់វា

ចែកដាច់នឹង $k, 1 \le k \le n$។ ឧទាហរណ៍ ៣២១ ជាលេខពិសេស ព្រោះ 3 ចែកដាច់នឹង១; ៣២ ចែកដាច់នឹង២;៣២១ ចែកដាច់នឹង៣។ តើមានលេខពិសេសដែលមានលេខ៦ខ្ទង់ចំនួនប៉ុន្មាន?។

209. ចូរបង្ហាញថា ចំនួនមួយចែកដាច់នឹង $2^k, k \in \mathbb{N}$ លុះត្រាតែ លេខ k ខ្ទង់ចុងក្រោយរបស់វា ចែកដាច់នឹង 2^k និងច្រាសមកវិញ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់មើលថាតើ 90908766123456789999872 ចែកដាច់នឹង៨រឺទេ?។

210. វិក័យប័ត្រមួយត្រូវបានរលុបលេខ។ តែគេអាចអានបានខ្លះថា មាន់៨៨ មានថ្លៃសរុប $x4.2y$ ដុល្លា ដែល x, y ជាខ្ទង់លេខដែលគេអានមិនដាច់។ តើមាន់និមួយៗថ្លៃប៉ុន្មាន?។

211. នាយសំពៅ៥នាក់ គ្រោងនឹងចែកផ្លែដូងមួយគំនរនៅព្រឹកស្អែក។ នៅយប់នោះម្នាក់ក្នុងចំនោមនោះ បានភ្ញាក់ឡើង ហើយសំរេចចិត្តទៅយកចំនែករបស់គាត់។ បន្ទាប់ពីបានបោះដូងមួយទៅអោយស្វា ដើម្បីអោយចំនែកស្មើគ្នា មិនសេសគាត់យកដូងចំនួន១ភាគ៥ រួចទៅដេកវិញ។ អ្នក៤នាក់ទៀត ក៏ធ្វើដូច្នេះ ដែរ ដោយម្នាក់ៗ បន្ទាប់ពីបោះដូងមួយទៅអោយស្វាហើយ ពួកគាត់យកដូងចំនួន១ភាគ៥នៃដូងដែលនៅសល់។ ព្រឹកឡើង នាយទាំង៥ បានបោះដូងមួយពីគំនរទៅអោយស្វា រួចចែកដូងនៅសល់ស្មើៗគ្នា។ តើដូងមានចំនួនតិចបំផុតប៉ុន្មាននៅក្នុងគំនរនោះ?។

212. ចូរបង្ហាញថា លេខមាន 3^n ខ្ទង់សុទ្ធតែលេខដូចគ្នាទាំងអស់ ចែកដាច់នឹង 3^n។ ឧទាហរណ៍ ១១១ ១១១ ១១១ ចែកដាច់នឹង ៩។

213. សន្មតថា $a_0, a_1, ...a_n$ ជាចំនួនគត់ ដែល $a_n \neq 0$ ហើយតាង

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

តាង x_0 ជាចំនួនសនិទាន ដែល $p(x_0) = 0$។ ចូរបង្ហាញថា បើ $1 \le k \le n$ នោះ

$$a_k x_0 + a_{k+1} x_0^2 + ... + a_n x_0^{n-k+1}$$ ជាចំនួនគត់។

214. លេខមួយមានលេខ១៩៥៣ខ្ទង់ ត្រូវបានគេសរសេរជារាងរង្វង់។ ចូរបង្ហាញថា បើចំនួនមានលេខ១៩៥៣ខ្ទង់សរសេរហើយនេះ ពេលយើងអានវា តាមទិសទ្រនិចនាឡិកា ដោយចាប់ផ្តើមចេញពីខ្ទង់ណាមួយ ចែកដាច់នឹង ២៧ នោះ បើ យើងអានចំនួននេះតាមទិសដដែល តែ ដោយចាប់ផ្តើមចេញពីខ្ទង់ណាមួយផ្សេងទៀត នោះចំនួនមានលេខ១៩៥៣ខ្ទង់ទទួលបាន ក៏ចែកដាច់នឹង ២៧ដែរ។

215. និយមន័យ–តួចែករួមធំបំផុត និង ពហុគុណរួមតូចបំផុត

បើ $a, b \in \mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំង២ព្រមគ្នា នោះ ចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលចែក a, b ដាច់ទាំង២ ហៅថា តួចែករួមធំបំផុតរបស់ a និង b។

គេតាងដោយ (a,b) រឺដោយ $PGCD(a,b)$។ ដូច្នេះ បើ $d \mid a$ និង $d \mid b$ នោះ $d \mid (a,b)$។

ឧទាហរណ៍–$(68,-6) = 2$, $(1998,1999) = 1$។

បើ $(a,b) = 1$ នោះគេនិយាយថា a និង b បឋមនឹងគ្នា។ ដូច្នេះ បើ a និង b បឋមនឹងគ្នា នោះចំនួន២នេះមិនអាចមានកត្តារួមធំជាង ១ទេ។

បើ $a,b \in \mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំង២ព្រមគ្នា នោះ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចបំផុត ដែលជាពហុគុណនៃ a ផងនិង b ផង ហៅថា ពហុគុណរួមតូចបំផុត នៃ a និង b ។

គេតាងដោយ $[a,b]$ រឺ $PPCM(a,b)$ ។

ឧទាហរណ៍–$[100,90]=\left[2^2 3^0 5^2, 2^1 3^2 5^1\right]=2^2.3^2.5^2=900$ ។

យើងឃើញថា បើ $a|c$ និង $b|c$ នោះ $[a,b]|c$ ។

216. ទ្រឹស្តីបទបាឆេ–បឺស៊្វូត (Bachet-Bezout)

តួចែករួមធំបំផុតរបស់គ្រប់ចំនួនគត់២ តាងដោយ a,b អាចសរសេរជា បន្សំលីនេអ៊ែរនៃ a និង b មានន័យថា មាន២ចំនួនគត់ x, y ដែល

$$(a,b)=ax+by \qquad ។$$

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $A=\{ax+by \mid ax+by>0, x,y\in\mathbb{Z}\}$ ។ យើងដឹងថា មានមួយក្នុងចំនោម $\pm a, \pm b$ ជាធាតុរបស់ A ដោយ a,b មិនអាចសូន្យទាំង២។ A មានធាតុតូចបំផុត តាងដោយ d ។ ដូច្នេះ គេមាន x_0, y_0 ដែល $d=ax_0+by_0$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $d=(a,b)$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា $d|a, d|b$ និងថា បើ $t|a$ និង $t|b$ នោះ $t|d$ ។

ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា $d|a$ ។ តាមប្រមាណវិធីចែកបែបអឺក្លីដ យើងអាចរកបានចំនួនគត់ q,r ដែល $0\le r<d$ ហើយដែល $a=dq+r$ ។ នោះ

$$r=a-dq=a\left(1-qx_0\right)-by_0$$

បើ $r>0$ នោះ $r\in A$ មានតំលៃតូចជាងធាតុតូចជាងគេរបស់ A ដែលតាងដោយ d ដូច្នេះ វាផ្ទុយពីការសន្មត។ ដូច្នេះ $r=0$ ។ ដូច្នេះ $dq=a$ មានន័យថា $d|a$ ។ ដូចគ្នា យើង អាចបង្ហាញថា $d|b$ ។

សន្មតថា $t|a, t|b$ ។ នោះ $a = tm, b = tn$ ចំពោះចំនួនគត់ m,n ។ ដូច្នេះ $d = ax_0 + by_0 = t(mx_0 + ny_0)$ មានន័យថា $t|d$ ។ ដូច្នេះ ទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

សំគាល់

បន្សំលីនេអ៊ែរនៃ a,b ចែកដាច់នឹង (a,b) ។

217. **ក្សូរ៉ូលែអឺក្លីដ**

បើ a ចែកដាច់ bc និង បើ $(a,b)=1$ នោះ a ចែកដាច់ c ។

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយ $(a,b)=1$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទបាេះ–បឺស៊ូត គេមានចំនួនគត់ x, y ដែល $ax+by=1$ ។ ដោយ $a|bc$ នោះ គេមានចំនួនគត់ s មួយ ដែល $as = bc$ ។ នោះ $c = c.1 = cax + cby = cax + asy$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $a|c$ ។

218. (កូរេ ១៩៩៨)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន l,m,n បឋមនឹងគ្នា២ៗ ដែល

$$(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$$ **ជាចំនួនគត់។**

ចំលើយ

យើងមាន

$$(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) = (l+m+n)\frac{mn+ln+lm}{lmn}$$

ជាចំនួនគត់ បើ lmn ចែកដាច់ $(l+m+n)$
$(mn+ln+lm)=l(mn+ln+lm)+(m+n)(mn+ln+lm)$ ។ ដូចនេះ lmn ចែកដាច់ $(m+n)(mn+ln+lm)=(m+n)mn+l(m+n)^2$ ។ សមមូលនឹង lmn ចែកដាច់ $(m+n)mn$ ។ ដោយ l បឋមនឹង m,n ដូច្នេះ l ចែកដាច់ $m+n$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន m ចែកដាច់ $l+n$ និង n ចែកដាច់ $l+m$ ។ ដោយអថេរទាំងអស់នេះមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី នោះយើងអាចសន្មតថា n ធំជាងគេ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $l+m\le 2n$ ។ ដោយ n ចែកដាច់ $l+m$ ដូច្នេះ $l+m=n$ រឺក៏ $l+m=2n$ ។ ករណី $l+m=2n$ អាចមានតែពេល $l=m=n$ (ព្រោះ $l,m\le n$)។ ដោយ l,m,n បឋមនឹងគ្នាពីរៗ នោះ $l=m=n=1$ ។ ដូច្នេះ $(l,m,n)=(1,1,1)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ។
ពិនិត្យករណី $l+m=n$ ។ ដូច្នេះ លក្ខខណ្ឌទៅជា

$$2(l+m)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{l+m}\right)=2\frac{(l+m)^2+lm}{lm}=2+2\frac{(l+m)^2}{lm}$$ ជាចំនួនគត់

សមមូលនឹង $2\dfrac{(l+m)^2}{lm}$ ជាចំនួនគត់។
ដោយ l បឋមនឹង m នោះយើងអាចសន្មតថា l សេស។ ដូច្នេះ l ចែកដាច់ $(l+m)^2=l^2+2lm+m^2$ សមមូលនឹង l ចែកដាច់ m^2 ។ ករណីនេះអាចតែពេល $l=1$ ប៉ុណ្ណោះ (ព្រោះ l បឋមនឹង m)។ រួចហើយ m ចែក២ដាច់។ ដូច្នេះ $m=1$ រឺ $m=2$ ។ ករណី $m=1$ យើងទាញបាន $n=2$ ។ $(1,1,2)$ ជាចំលើយ។ បើ $m=2$ យើងទាញបាន $n=3$ ។ $(1,2,3)$ ក៏ជាចំលើយដែរ។
ដូច្នេះជាសរុបចំលើយមាន $(1,1,1);(1,1,2);(1,2,3)$ និង ចំលាស់ទាំងអស់របស់វាជាចំលើយរបស់សមីការ។

219.ទ្រឹស្តីបទ

បើ $(a,b)=d$ នោះ $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$

សំរាយបញ្ជាក់

តាមទ្រឹស្តីបទបាឆេ–បឺស៊ូត គេមានចំនួនគត់ x,y ដែល $ax+by=d$ ។ ដូច្នេះ $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=1$ ។ a/d និង b/d ជាចំនួនគត់។ យើងមានបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ a/d និង b/d ដូច្នេះ $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)$ ចែកដាច់បន្សំលីនេអ៊ែរនេះ មានន័យថា ចែក១ដាច់។ យើងទាញបាន $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ ។

220. ទ្រឹស្តីបទ

បើ c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $(ca,cb)=c(a,b)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $d_1=(ca,cb)$ និង $d_2=(a,b)$ ។ យើងបង្ហាញថា $d_1\mid cd_2$ និង $cd_2\mid d_1$ ។ ដោយ $d_2\mid a$ និង $d_2\mid b$ នោះ $cd_2\mid ca, cd_2\mid cb$ ។ ដូច្នេះ cd_2 ជាតួចែករួមរបស់ ca និង cb ហើយដូច្នេះ $d_1\mid cd_2$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទបាឆេ–បឺស៊ូត គេអាចរកបានចំនួនគត់ x,y ដែល $d_1=acx+bcy=c(ax+by)$ ។ តែ $ax+by$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ a,b ហើយដូច្នេះ វាចែកដាច់នឹង d_2 ។ គេមានចំនួនគត់ s ដែល $sd_2=ax+by$ ។ ដូច្នេះ $d_1=csd_2$ មានន័យថា $cd_2\mid d_1$ ។

ចំណាំះ

ដូចគ្នា យើងទាញបាន $(ca,cb)=|c|(a,b)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនសូន្យ c ។

221. ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះចំនួនគត់មិនសូន្យ a,b,c គេមាន $(a,bc)=(a,(a,b)c)$

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយ $(a,(a,b)c)$ ចែកដាច់ $(a,b)c$ នោះ វាចែកដាច់ bc ។ ដូច្នេះ $(a,(a,b)c)$ ចែកដាច់ a និង bc ហើយដូច្នេះ $(a,(a,b)c)|(a,bc)$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត (a,bc) ចែកដាច់ a និង bc នោះ វាចែកដាច់ ac និង bc ។ ដូច្នេះ (a,bc) ចែកដាច់ $(ac,bc)=c(a,b)$ ។ ជាសន្និដ្ឋាន (a,bc) ចែកដាច់ a និង $c(a,b)$ ហើយដូច្នេះ វាចែកដាច់ $(a,(a,b)c)$ ។ ដូច្នេះ ទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

222. ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះចំនួនគត់មិនសូន្យ a,b,c គេមាន $(a^2,b^2)=(a,b)^2$

សំរាយបញ្ជាក់

សន្មតថា $(m,n)=1$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ២២០ យើងទាញបាន

$$(m^2,n^2)=(m^2,(m^2,n)n)=(m^2,(n,(m,n)m)n)$$

ដោយ $(m,n)=1$ នោះ កន្សោមខាងលើ ស្មើនឹង (m^2,n) ។ តាមទ្រឹស្តីបទ២២០ ដដែល យើងទាញបាន

$$(m^2,n)=(n,(m,n)m)=1$$

ដូច្នេះ $(m,n)=1$ នាំអោយ $\left(m^2,n^2\right)=1$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ២១៨

$$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=1$$

ដូច្នេះ

$$\left(\frac{a^2}{(a,b)^2},\frac{b^2}{(a,b)^2}\right)=1$$

តាមទ្រឹស្តីបទ២១៩– ដោយគុណកន្សោមខាងលើនឹង $(a,b)^2$ យើងទាញបាន

$$\left(a^2,b^2\right)=(a,b)^2$$

223. តាង $(a,b)=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)=1$ រឺ $=3$ ។

ចំលើយ

តាង $d=\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)$ ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់ $(a+b)^2-a^2+ab-b^2=3ab$
ដូច្នេះ d ចែកដាច់ $3b(a+b)-3ab=3b^2$ ។ ដូចគ្នា $d\mid 3a^2$ ។ ដូច្នេះ
$d\mid\left(3a^2,3b^2\right)=3\left(a^2,b^2\right)$ ។ ដោយ $(a,b)=1$ នោះ $\left(a^2,b^2\right)=(a,b)^2=1$ ។ ដូច្នេះ
$d\mid 3$ មានន័យថា $d=1$ រឺ 3 ។

224. **តាង $a,a\neq 1,m,n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា**

$$\left(a^m-1,a^n-1\right)=a^{(m,n)}-1$$

ចំលើយ

តាង $d=(m,n), sd=m, td=n$ ។ ដូច្នេះ

$a^m-1=\left(a^d\right)^s-1$ ចែកដាច់នឹង a^d-1 ។ ដូចគ្នា

a^n-1 ចែកដាច់នឹង a^d-1 ។

ដូច្នេះ $\left(a^d-1\right)|\left(a^m-1,a^n-1\right)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទបាឆេ–បឺស៊ូត គេអាចរកបានចំនួនគត់ x,y ដែល $mx+ny=d$ ។ គួរកត់សំគាល់ថា x,y ត្រូវតែមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។ វាមិនអាចមានសញ្ញាដកទាំង២ទេ ព្រោះ $d\geq 0$ ។ វាមិនអាចសញ្ញាបូកទាំង២ទេ ព្រោះនាំអោយ $d\geq m+n$ ដែលតាមពិត $d\leq m, d\leq n$ ។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា $x>0, y\leq 0$ ។ តាង $t=\left(a^m-1,a^n-1\right)$ ។ ដូច្នេះ $t|\left(a^{mx}-1\right)$ និង $t|\left(a^{-ny}-1\right)$ ។ ដូច្នេះ $t|\left(\left(a^{mx}-1\right)-a^d\left(a^{-ny}-1\right)\right)=a^d-1$

225. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៥៩)

ចូរបង្ហាញថា ប្រភាគ $\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគមិនអាចសំរួលបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ចំលើយ

យើងមាន

$$2(21n+4)-3(14n+3)=-1$$

ដូច្នេះ ភាគយកនិងភាគបែង របស់ប្រភាគនេះ មិនអាចមានកត្តារួមធំជាង១ទេ។ មានន័យថា វាមិនអាចសំរួលបានឡើយ។

226. (អាមេរិច ១៩៨៥)

បណ្តាចំនួននៅក្នុងស៊េរី

$$101, 104, 109, 116, ...$$

មានរាង $a_n = 100 + n^2, n = 1, 2, ...$ ចំពោះ n និមួយៗ តាង $d_n = (a_n, a_{n+1})$ ។

ចូរគណនា $\max_{n \geq 1} d_n$ ។

ចំលើយ

យើងមាន $d_n = \left(100 + n^2, 100 + (n+1)^2\right)$

$$= \left(100 + n^2, 100 + n^2 + 2n + 1\right)$$

$$= \left(100 + n^2, 2n + 1\right)$$

ដូច្នេះ $d_n \mid \left(2\left(100 + n^2\right) - n(2n+1)\right) = 200 - n$ ។

ដូច្នេះ $d_n \mid \left(2(200 - n) + (2n+1)\right) = 401$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា $d_n \mid 401$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។ ដូច្នេះ d_n មិនអាចធំលើសពី៤០១ទេ។ តើ d_n អាចមានតំលៃស្មើ៤០១រឺទេ?។

អោយ $n = 200$ នោះ

$$a_{200} = 100 + 200^2 = 100(401) \text{ និង } a_{201} = 100 + 201^2 = 101(401)$$

ដូច្នេះ d_n អាចមានតំលៃរហូតដល់៤០១។ មានន័យថា $\max_{n \geq 1} d_n = 401$ ។

227. ចូរបង្ហាញថា បើ m និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ m ជាចំនួនសេស នោះ $\left(2^m - 1, 2^n + 1\right) = 1$ ។

ចំលើយ

តាង $d=\left(2^m-1,2^n+1\right)$ ។ ដូច្នេះ d ត្រូវតែជាចំនួនសេស និង $2^m-1=kd$ និង $2^n+1=ld$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ k,l ។ ដូច្នេះ $2^{mn}=\left(kd+1\right)^n=td+1$ ដែល $t=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}k^{n-j}d^{n-j-1}$ ។ ដូចគ្នា

$2^{mn}=\left(ld-1\right)^m=ud-1$ បើសិនជា m ជាចំនួនសេស។ ដោយ $td+1=ud-1$ នោះ $d\,|\,2$ ហើយដោយ d ជាចំនួនសេស នោះ $d=1$ ។

228. ចូរបង្ហាញថា មានស្វីតនព្វន្តវែងមួយ ដែលតួរបស់វានិមួយៗបឋមរវាងគ្នា២ៗ។

ចំលើយ

បណ្តាចំនួនដែលមានរាង $k.m!+1, k=1,2,....,m$ បង្កើតបានជាស្វីតនព្វន្ត ដែលមានតួចំនួន m និង មានផលសងរួម $m!$ ។ សន្មតថា $d\,|\left(l.m!+1\right)$, $d\,|\left(s.m!+1\right), 1\le l<s\le m$ ។ នោះ $d\,|\left(s\left(l.m!+1\right)-l\left(s.m!+1\right)\right)=s-l<m$, ដូច្នេះ $1\le d<m$ ដូច្នេះ $d\,|\,m!$ ។ ដូច្នេះ $d\,|\left(s.m!+1-s.m!\right)=1$ ។ មានន័យថា តួ២ៗនៃស្វីតនេះ បឋមរវាងគ្នា។

229. ចូរបង្ហាញថា $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ចំលើយ

តាមសមភាពទ្វេធា

$$\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n+1}{n+1}$$

ដោយ $2n+1$ និង $n+1$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ហើយដោយផ្នែកខាងស្តាំរបស់សមភាពខាងលើជាចំនួនគត់ នោះ វាត្រូវតែ $(n+1)$ ចែកដាច់ $\binom{2n}{n}$ ។

230. **គេជ្រើសរើសយក៥១ចំនួនគត់ចេញពី $1,2,...,100$ ។ ចូរបង្ហាញថា បើទោះជាគេជ្រើសរើសយ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គេគង់ទទួលបាន២ចំនួនដែលបឋមរវាងគ្នាដែរ។**

ចំលើយ

យើងតំរៀប១០០ចំនួនគត់ជា៥០សំនុំ

$$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},...,\{99,100\}$$

សំនុំនិមួយៗមានធាតុរបស់វាបឋមនឹងគ្នា។

ដោយគេត្រូវជ្រើសរើស៥១ចំនួនគត់ នោះគេត្រូវតែបាន២ចំនួនដែលនៅក្នុងសំនុំតែមួយ។

មានន័យថា ត្រូវតែទទួលបាន២ចំនួនដែលបឋមរវាងគ្នា។

231. **ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n>6$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជាផលបូកនៃ២ចំនួនគត់ធំជាង១ និង បឋមរវាងគ្នា។**

ចំលើយ

បើ n ជាចំនួនសេស នោះយើងយក $a=2, b=n-2$ ។

បើ n គូ នោះ n អាចជា $4k$ រឺ $4k+2$ ។

បើ $n=4k$ នោះ យើងយក $a=2k+1, b=2k-1$ ។ចំនួន២នេះបឋមរវាងគ្នា ព្រោះបើ $d=(2k+1,2k-1)$ នោះ $d\,|\,(2k+1-(2k-1))=2$ ដោយ d សេស នោះ $d=1$ ។
បើ $n=4k+2, k>1$ នោះ យើងយក $a=2k+3, b=2k-1$ ។

232. តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន ≤ 1260 ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលបឋមនឹង១២៦0?។

ចំលើយ

យើងមាន $1260=2^2.3^2.5.7$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរកចំនួនចំនួនវិជ្ជមានដែល ≤ 1260 ហើយដែលចែកមិនដាច់នឹង $2,3,5$ និងនឹង 7 ។ តាង A ជាសំនុំនៃចំនួនគត់ ≤ 1260 ដែលជាពហុគុណនៃ២, តាង B ជាសំនុំនៃចំនួនគត់ ≤ 1260 ដែលជាពហុគុណនៃ៣, ។ល។
យើងដឹងថា

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D| &= |A|+|B|+|C|+|D| \\ &\quad -|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D| \\ &\quad -|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D| \\ &\quad +|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D| \\ &\quad +|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D| \\ &= 630+420+252+180-210-126 \\ &\quad -90-84-60-36+42+30+18+12-6 \\ &= 972\end{aligned}$$

ដូច្នេះចំនួនចំនួនគត់ដែលរកគឺ $1260-972=288$ ។

233. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ n វិជ្ជមាន ដែល 2^n ចែកដាច់ 3^n-1។

ចំលើយ

យើងមាន

$$3^n-1=2\left(3^{n-1}+3^{n-2}+...+1\right)$$

បើ n ជាចំនួនសេស នោះ $3^{n-1}+3^{n-2}+...+1$ ជាផលបូកនៃ n ចំនួនសេស ដូច្នេះ ផលបូកជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះ 3^n-1 មិនអាចជាពហុគុណនៃ៤បានទេ។ ដូច្នេះមានតែ $n=1$ ។

បើ n ជាចំនួនគូ តាង $n=2k$ ។ លក្ខខណ្ឌទៅជា 2^{2k} ចែកដាច់ $3^{2k}-1=\left(3^k-1\right)\left(3^k+1\right)$ ។ ចំនួនទាំង២គឺ 3^k-1 និង 3^k+1 មានផលសងស្មើ២ ដូច្នេះ $PGCD$ របស់ចំនួនពីរនេះ ជាតួចែករបស់ 2 ។ ម៉្យាងវិញទៀតចំនួនទាំងនេះជាចំនួនគូ ដូច្នេះ $PGCD\left(3^k-1,3^k+1\right)=2$ ។ យើងទាញបានថា បើមិន 3^k-1 ក៏ 3^k+1 ដែរ ដែលចែកដាច់នឹង 2^{2k-1} ។ តែវាត្រូវតែជា $3^k+1\geq 2^{2k-1}$ ។ វិសមភាពនេះមិនពិតទេ បើ $k\geq 3$ ។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយដៃឃើញថា $k=0,k=1,k=2$ ជាចំលើយ។

ដូច្នេះចំលើយគឺ $n=1,n=2,n=4$ ។

234. ចូរបង្ហាញថា $(a,b)[a,b]=ab$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a,b។

235. ចូរគណនា $[23!41!,29!37!]$

236. ចូរគណនា២ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b ដែល $a^2+b^2=85113$ និង $[a,b]=1764$។

237. ចូរគណនា $a,b\in\mathbb{N}$ ដែល $(a,b)=12,[a,b]=432$។

238. ចូរបង្ហាញថា $(a,b)^n=\left(a^n,b^n\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។

239. តាង $a\in\mathbb{N}$។ចូរគណនា គ្រប់ $b\in\mathbb{N}$ ដែល $\left(2^b-1\right)|\left(2^a+1\right)$

240. ចូរបង្ហាញថា $\left(n^3+3n+1,7n^3+18n^2-n-2\right)=1$

241. ចំនួនគត់ a_n,b_n កំនត់ដោយ $a_n+b_n\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^n,n\in\mathbb{N}$

ចូរបង្ហាញថា $\left(a_n,b_n\right)=1,\forall n$។

242. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាពិតរឺមិនពិតនូវសំនើ២ខាងក្រោម

ក) បើ $a,b\in\mathbb{N},a<b$ នោះ នៅក្នុងគ្រប់សំនុំនៃ b ចំនួនគត់រៀងតគ្នា គេមានធាតុ២ ដែលមានផលគុណចែកដាច់នឹង ab។

ខ) បើ $a,b,c\in\mathbb{N},a<b<c$ នោះ នៅក្នុងគ្រប់សំនុំនៃ c ចំនួនគត់តរៀងគ្នា គេមានចំនួនគត់៣ ដែលផលគុណរបស់វាចែកដាច់នឹង abc។

243. តាង $n,k,n\ge k>0$ ជាចំនួនគត់។ ចូរបង្ហាញថា តួចែករួមធំបំផុតរបស់

$$\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},\ldots,\binom{n+k}{k}$$

ស្មើ ១។

(ណែនាំ៖ បង្ហាញថា $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n+j}{k}C_{n+j}^{k}=(-1)^k$)

244. តាង $F_n=2^{2^n}+1$ ជាតួទី n របស់ចំនួនហ្វែរម៉ា (Fermat)។ ចូរគណនា $\left(F_n,F_m\right)$។

245. ចូរគណនាតួចែករួមធំបំផុតរបស់ស្វ៊ីត

$16^n + 10n - 1, n = 1, 2, \ldots.$

246. ចូរបង្ហាញថា $\left(n! + 1, (n+1)! + 1\right) = 1$

247. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 17$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $n = a + b + c$ ដែល a, b, c ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមនឹងគ្នា២ៗ ហើយនិមួយៗ សុទ្ធតែធំជាង១។
(ណែនាំៈ ពិនិត្យ $n \bmod 12$ ។ សរសេរតួ២នៃលេខបូកជារាង $6k + s$ និងតួទី៣ ជាចំនួនថេរ)។

248. ចូរបង្ហាញថា គេគ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a, b, n > 1$ ដែល

$$\left(a^n - b^n\right) \mid \left(a^n + b^n\right) \qquad \text{ទេ។}$$

249. ចូរបង្ហាញថា មេគុណទ្វេធា មានលក្ខណៈ

$$\left(\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}\right) = \left(\binom{n-1}{k}, \binom{n+1}{k+1}, \binom{n}{k-1}\right)$$

250. S ជាសំនុំនៃចំនួនគត់ ដែលមិនមានធាតុ៣របស់វា បឋមនឹងគ្នា២ៗទេ។ តើសំនុំ S អាចមានចំនួនធាតុច្រើនបំផុតប៉ុន្មាន បើ S ជាសំនុំរងនៃសំនុំចំនួនគត់ពី១ ដល់១៦?។

251. ទ្រឹស្តីបទ

បើ $n>1$ នោះ n ចែកដាច់យ៉ាងហោចណាស់ នឹងចំនួនបឋមមួយ។

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយ $n>1$ នោះវាមានយ៉ាងហោចណាស់តួចែកមួយ>1។ ដូច្នេះ វាមានតួចែកមួយដែលតូចជាងគេ ហើយធំជាង១ តាងដោយq។ យើងថា q ជាចំនួនបឋម។ បើ q មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ នោះ យើងអាចសរសេរq ជា $q=ab,\ 1<a\le b<q$។ តែបើដូច្នេះ a ជាតួចែករបស់n ដែលធំជាង១ និងតូចជាងq ដែលផ្ទុយនឹងសម្មតិកម្ម ដែលថាq តូចជាងគេ។

252. ទ្រឹស្តីបទអឺគ្លីដ

សំនុំចំនួនបឋម ជាសំនុំអនន្ត។

សំរាយបញ្ជាក់

សន្មតថា សំនុំចំនួនបឋមជាសំនុំកំនត់ កំនត់ដោយ $p_1,\ldots,p_k$។ ដូច្នេះ យើងមិនអាចរកបានចំនួនគត់ណាមួយ ដែលចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋមទាំងនេះទេ។ ពិនិត្យ $n=p_1p_2\ldots p_k+1$ បើ $p_i\left(1\le i\le k\right)$ ចែកដាច់n នោះ p_i ត្រូវតែចែក១ដាច់ មិនពិត។ ដូច្នេះ សំនុំចំនួនបឋមជាសំនុំអនន្ត។

253. គន្លឹះ

ផលគុណនៃ២ចំនួនដែលមានរាង $4k+1$ ក៏ជាចំនួនដែលមានរាង $4k+1$ ដែរ។

សំរាយបញ្ជាក់

ពិនិត្យ $\left(4a+1\right)\left(4b+1\right)=4\left(4ab+a+b\right)+1$

254. ទ្រឹស្តីបទ

មានចំនួនបឋមដែលមានរាង $4n+3$ ច្រើនរាប់មិនអស់។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិធីផ្ទុយ ដោយសន្មតថាចំនួនបឋមមានរាង $4n+3$ មានចំនួនកំនត់ តាងដោយ $p_1,...,p_k$ ។ យើងពិនិត្យចំនួន $N=4p_1p_2...p_k+3$ ។
តាង q ជាតួចែកបឋមមួយរបស់ N ។ យើងពិនិត្យគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ q ដូច្នេះ q អាចមានរាង

$$4a, 4a+1, 4a+2, 4a+3 \text{ ។}$$

$-q$ មិនអាចមានរាង $4a, 4a+2$ ទេ។

$-q=4a+3$: មិនអាច ព្រោះបើដូច្នេះ នោះ q នឹងទៅជាចំនួនបឋមមួយដែលមានរាង $4n+3$ ហើយនឹងស្មើនឹងចំនួនមួយក្នុងចំនោម $p_i\left(1\le i\le k\right)$ (ព្រោះសំនុំចំនួនបឋមមានរាង $4n+3$ មានចំនួនកំនត់)។ បើដូច្នេះ q មិនអាចជាតួចែករបស់ N បានទេ។

$-$ដូច្នេះមានតែ $q=4a+1$ ។ ដូច្នេះតួចែករបស់ N សុទ្ធតែមានរាង $4a+1$ ។ ដូច្នេះ N ស្មើនឹងផលគុណនៃបណ្តាលេខដែលមានរាង $4a+1$, ដូច្នេះ ពេលចែកវានឹង 4 គេបានសំនល់ស្មើ1។ តែមិនអាចព្រោះ $N=4p_1p_2...p_k+3$ ចែកនឹង៤ មានសំនល់ ស្មើ៣។ដូច្នេះ ចំនួនបឋមដែលមានរាង $4n+3$ មានចំនួនច្រើនមិនកំនត់។

255. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k គេអាចរកបានចំនួនគត់ n មួយ ដែលបណ្តាចំនួន

$n+1,...,n+k$ សុទ្ធតែជាចំនួនពហុគុណ។

ចំលើយ

ពិនិត្យ $n=(k+1)!+1$ ។ ករណីនេះ បណ្តាចំនួន $n+1,\dots,n+k$ សុទ្ធតែជាចំនួនមិនបឋម។

256.ទ្រឹស្តីបទ

បើចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ជាចំនួនពហុគុណ នោះ វាមានកត្តាបឋម p មួយ ដែល $p \le \sqrt{n}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

សន្មតថា $n=ab, 1<a\le b<n$ ។ បើ a និង b សុទ្ធតែ $>\sqrt{n}$ ទាំង២ នោះ $n=ab>\sqrt{n}\sqrt{n}=n$ មិនពិត។ ដូច្នេះ n ត្រូវមានកត្តាមួយ $\neq 1$ និង $\le \sqrt{n}$ ។ ដូច្នេះវាត្រូវមានកត្តាបឋមមួយ ដែល $\le \sqrt{n}$ ។

257. ចូរគណនាចំនួននៃចំនួនបឋមដែល ≤ 100 ។

ចំលើយ

យើងឃើញថា $\sqrt{100}=10$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ២៥៥ខាងលើ គ្រប់ចំនួនពហុគុណទាំងអស់ដែល $10\le n\le 100$ មានកត្តាបឋមមួយ ក្នុងចំនោម $2,3,5$ រឺ 7 ។ តាង A_m ជាចំនួនពហុគុណនៃ m ដែល ≤ 100 ។ ដូច្នេះ $|A_2|=50, |A_3|=33,$

$|A_5|=20, |A_7|=14, |A_6|=16, |A_{10}|=10, |A_{14}|=7, |A_{15}|=6, |A_{21}|=4, |A_{35}|=2,$

$|A_{30}|=3, |A_{42}|=2, |A_{70}|=1, |A_{105}|=0, |A_{210}|=0,$ ។

ដូច្នេះ ចំនួនចំនួនបឋមដែល ≤ 100 គឺ

$$=100-(\text{ចំនួនចំនួនពហុគុណ}\le 100)-1$$

$$= 4 + 100 - (\text{ចំនួនចំនួនពហុគុណនៃ២,៣,៥រឺ៧} \le 100\ ) - 1$$

$$= 4 + 100 - \left(50 + 33 + 20 + 14\right) + \left(16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2\right)$$

$$- \left(3 + 2 + 1 + 0\right) - 0 - 1$$

$$= 25$$

ក្នុងនោះ ដក១ ព្រោះ ១ មិនមែនជាចំនួនបឋម ហើយក៏មិនមែនជាចំនួនពហុគុណដែរ។

258. ទ្រឹស្តីបទ

បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $\binom{p}{k}$ ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ $0 < k < p$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងមាន $$\binom{p}{k} = \frac{p\left(p-1\right)....\left(p-k+1\right)}{k!}$$

ដូច្នេះ $$k!\binom{p}{k} = p\left(p-1\right)....\left(p-k+1\right)$$

ដូច្នេះ នាំអោយ $p \mid k!\binom{p}{k}$ ។ ដោយ $k < p$, នោះ p ចែកមិនដាច់ $k!$ ។ តាមវិបាកអឺគ្លីដ

នោះ មានតែ $p \mid \binom{p}{k}$ ។

259. បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ p ចែកដាច់ $2^p - 2$ ។

ចំលើយ

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$2^p - 2 = \left(1+1\right)^p - 2 = \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + ... + \binom{p}{p-1}$$

ដោយដឹងថា $\binom{p}{0}=\binom{p}{p}=1$ ។ តាមវិបាកខាងលើ p ចែកដាច់គ្រប់តួទាំងអស់របស់អង្គខាងស្តាំនៃសមភាពខាងលើ។

260. **តាង a និង b ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា ab និង $a+b$ ក៏បឋមនឹងគ្នាដែរ។**

ចំលើយ

តាង d ជាតួចែករបស់រួមរបស់ ab និង $a+b$ ។ ដូច្នេះ d ចែក $a(a+b)-ab=a^2$ ដាច់។ ដូចគ្នា d ចែក b^2 ដាច់។ ដោយ a និង b បឋមនឹងគ្នា នោះ a^2 និង b^2 ក៏បឋមនឹងគ្នាដែរ។ ដូច្នេះ $d=\pm 1$ ។

261. គេកំនត់ ចំនួនហ្វែរម៉ាទីn ដោយរូបមន្ត $F_n=2^{2^n}+1$ ។ ចូរបង្ហាញថា ចំនួន F_n ទាំងអស់បឋមនឹងគ្នា ពីរៗ។

ចំលើយ

យើងដឹងថា

$$\begin{aligned} F_{n+1}-2=2^{2^{n+1}}-1 &= \left(2^{2^n}-1\right)\left(2^{2^n}+1\right) \\ &= \left(2^{2^{n-1}}-1\right)\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^n}+1\right) \\ &= F_0F_1\dots F_n \end{aligned}$$

តាង d ជាតួចែករួមរវាង F_n និង F_m ។ សន្មតថា $n<m$ ។ តាមទំនាក់ទំនងខាងលើ ដោយសារ d ចែក F_n ដាច់ នោះ d ក៏ចែក F_m-2 ដាច់ដែរ។ ដោយសារ d ចែក F_m ដាច់

នោះ d ចែក2 ដាច់។ ដោយសារ F_n និង F_m ជាចំនួនសេស នោះd ជាតួចែកក៏សេសដែរ ហើយចែក២ដាច់ មានន័យថា $|d|=1$។

262. ចូរបង្ហាញថា មានច្រើនរាប់មិនអស់នូវចំនួនបឋមដែលមានរាង $6n+5$។

263. ចូរបង្ហាញថា មានច្រើនរាប់មិនអស់នូវចំនួនបឋម p ដែល $p-2$ មិនមែន ជាចំនួនបឋម។

264. បើ p និង q ជាចំនួនបឋមសេសតរៀងគ្នា ចូរបង្ហាញថា បណ្ដាកត្តាបឋមរបស់ $p+q$ មានយ៉ាងហោចណាស់ចំនួនបឋម៣ (មិនចាំបាច់ជា៣ចំនួន បឋមខុសៗគ្នាទេ)។

265. ក) តាង p ជាចំនួនបឋម និង $n\in\mathbb{N}$។ ចូរបង្ហាញថា p ចែកដាច់ $\left(n^p-n\right)$។

ខ) ចូរបង្ហាញលទ្ធផលនេះ ទៅចំពោះ $n\in\mathbb{Z}$។

គ) ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្ដីបទភែរម៉ាៈ បើ p ចែកមិនដាច់ n នោះ p ចែកដាច់$\left(n^{p-1}-1\right)$។

ឃ) ចូរបង្ហាញថា $42\,|\left(n^7-n\right), n\in\mathbb{Z}$

ង) ចូរបង្ហាញថា $30\,|\left(n^5-n\right), n\in\mathbb{Z}$

266. តាង p ជាចំនួនបឋមសេស និង តាង $(a,b)=1$។ ចូរបង្ហាញថា $\left(a+b,\dfrac{a^p+b^p}{a+b}\right)$ ចែកដាច់ p ។

267. ចូរបង្ហាញថា $3,5,7$ ជាត្រីធាតុបឋមតែមួយគត់ ដែលមានរាង $p, p+2, p+4$។

268. តាង $n>2$។ ចូរបង្ហាញថា បើមានមួយក្នុងចំណោម 2^n-1 និង 2^n+1 ជាចំនួនបឋម នោះ មួយទៀត
ត្រូវតែជាចំនួនពហុគុណ។

269. ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ កំនត់ដោយ

$$a_n=1+\frac{n(1+n)}{1+n^2}+\ldots+\frac{n^n\left(1+n^n\right)}{1+n^{2n}}$$

$$b_n=\left(\frac{a_n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}},$$

ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

265. ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ សុទ្ធតែអាចបំបែកជាផលគុណនៃបណ្តាចំនួនបឋម។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងពិនិត្យចំនួនគត់ 1332 ។ យើងអាចបំបែកវាជា $1332 = 2.2.3.3.37$ ។ ដោយ $2,3,37$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម នោះយើងមិនអាចបំបែកវាបន្ថែមទៀតទេ។ ក្រោយមកទៀតយើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់សុទ្ធតែអាចបំបែកជាផលគុណដូចខាងលើបានទាំងអស់។

យើងពិនិត្យចំនួនគត់ n មួយ។

ក–ករណី n ជាចំនួនបឋម

ខ–ករណី n មិនមែនជាចំនួនបឋម ដូច្នេះយ៉ាងហោចណាស់ មានតួចែកបឋម p_1 មួយដែល

$$n = p_1 q_1 \qquad \text{ដែល} \qquad 1 < q_1 < n$$

យើងមាន២ករណីទៀត

១–ករណី q_1 ជាចំនួនបឋម នោះ $n = p_1 q_1$ ជាផលគុណនៃចំនួនបឋម២។

២–ករណី q_1 មិនមែនជាចំនួនបឋម។ q_1 មានតួចែកបឋម p_2 មួយយ៉ាងតិចដែល

$q_1 = p_2 q_2$ និង $n = p_1 p_2 q_2$ ដែល $1 < q_2 < q_1 < n$ ។

គេធ្វើវិចារដដែលនេះឡើងវិញ ជាបន្តបន្ទាប់ទៅទៀត។ គេបានផលចែកបន្តបន្ទាប់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $1 < \ldots < q_2 < q_1 < n$ ។

ដូច្នេះ ដោយចំនួនផលចែកមានកំនត់ នោះ មាន k ដែល q_k ជាចំនួនបឋម ហើយស្មើ p_k ។

ដូច្នេះ n អាចសរសេរជា

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k \qquad \text{ដែល } p_1, \ldots, p_k \text{ ជាចំនួនបឋមខុសៗគ្នាឬស្មើគ្នាក៏បាន។}$$

យើងអាចតំរៀបកត្តាបឋមទាំងនោះជារាង

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},\ \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \ldots\ldots, \alpha_k > 0,$$

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_k$$

ដែល p_j ជាបណ្តាចំនួនបឋមខុសៗគ្នា។ យើងហៅការបំបែកជាផលគុណកត្តាបឋមនៃn ខាងលើ ថា កត្តាផលគុណរាងកាណូនិចនៃn ។ ឧទាហរណ៍ $2^3 3^2 5^2 7^3$ ជា កត្តាផលគុណរាងកាណូនិចនៃ 617400 ។

266. ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃនព្វន្ត

គ្រប់ចំនួនគត់ >1 អាចបំបែកជាផលគុណកត្តាបឋមបានតែមួយបែបគត់ បើមិនគិតពីលំដាប់លំដោយនៃកត្តាទាំងនោះទេ។ រឺនិយាយម៉្យាងទៀតថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 1$ គេមានចំនួនបឋម ដែលខុសគ្នា២ៗ $p_1,\ldots,p_k$ តែមួយបែបគត់ និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ តែមួយបែបគត់ ដែល

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថាវាអាចបំបែកបាន២យ៉ាង

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k \quad \text{និង} \quad n = p'_1 p'_2 \ldots p'_h$$

ដែល $p_1,\ldots,p_k$ និង $p'_1,\ldots,p'_h$ ជាចំនួនបឋមខុសគ្នារឺស្មើគ្នា។

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k = p'_1 p'_2 \ldots p'_h$$

$$p_1 \mid n \Rightarrow \qquad p_1 \mid p'_1 p'_2 \ldots p'_h$$

ដោយ p_1 ជាចំនួនបឋម នោះ p_1 ត្រូវស្មើនឹងចំនួនណាមួយក្នុងចំណោម $p'_1, p'_2, \ldots, p'_h$ ។ ឧបមាថា $p_1 = p'_1$ ។ យើងធ្វើវិចារដដែលនេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួន $p_i \left(1 \le i \le k\right)$ យើងទាញបាន

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \subset \{p'_1, p'_2, \ldots, p'_k\}$$

ដូចគ្នា $\{p_1, p_2, ..., p_k\} \supset \{p'_1, p'_2, ..., p'_k\}$
នាំអោយ

$$\{p_1, p_2, ..., p_k\} = \{p'_1, p'_2, ..., p'_k\}$$

ដូច្នេះ n អាចដាក់ជាផលគុណកត្តាបឋមបានតែម៉្យាងគត់។

ទ្រឹស្តីបទខាងលើ នាំអោយយើងទាញបានទំនាក់ទំនងសំរាប់គណនា $PGCD$ និង $PPCM$ នៃចំនួនគត់២បើសិនជាយើងស្គាល់ផលគុណកត្តាបឋមរបស់វា។ តាង

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$$

ដែលក្នុងនោះ បណ្តា p_i ខុសគ្នា២ៗ តែបណ្តា α_i និង β_i អាចស្មើ0។ យើងមាន

$$PGCD(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} ... p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}.$$

$$PPCM(a,b) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} ... p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

គួរកត់សំគាល់ថា ចំពោះចំនួនពិត α និង β យើងមាន

$$\min(\alpha,\beta) + \max(\alpha,\beta) = \alpha + \beta .$$

នាំអោយយើងទាញបាន

$$PGCD(a,b).PPCM(a,b) = ab$$

267. ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ចំលើយ

សន្មតថា $\sqrt{2}=a/b$ ដែល a និងb ជាចំនួនដែលបឋមរវាងគ្នា។ នោះ $2b^2=a^2$ ។ យើងឃើញថា អង្គខាងស្ដាំរបស់សមភាព មានចំនួនបឋមគុណគ្នា២ដង $(a\times a)$។ អង្គខាងឆ្វេងរបស់សមភាព មានចំនួនបឋមគុណគ្នា៣ដង $(2.b.b)$។ ដូច្នេះសមភាពនេះមិនពិត ព្រោះចំនួនមួយអាចបំបែកជាផលគុណកត្តាបឋមបានតែមួយបែបគត់។

268. **ចូរបង្ហាញថា បើពហុធា**

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង មានតំលៃស្មើ៧ ត្រង់៤ចំនួនគត់ផ្សេងគ្នានៃ x នោះ ពហុធានេះ មិនអាចមានតំលៃស្មើ ១៤ទេ ចំពោះគ្រប់តំលៃ x ទាំងអស់។

ចំលើយ

យើងមាន $7=-7(1)(-1)$

សន្មតថា $p(x_k)-7=0$ ចំពោះតំលៃខុសៗគ្នា នៃ $x_k, 1\le k\le 4$ ។ នោះ

$$p(x)-7=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)q(x)$$

ដែលក្នុងនោះ ពហុធាq មានមេគុណជាចំនួនគត់។ សន្មតថា មានចំនួនគត់ m ដែល $p(m)=14$ ។ នោះ

$$7=p(m)-7=(m-a_1)(m-a_2)(m-a_3)(m-a_4)q(m)$$

ដោយកត្តា$(m-x_k)$ មានតំលៃខុសគ្នាទាំងអស់ នោះ យើងបានបំបែក7 ជាផលគុណនៃយ៉ាងហោចណាស់៤ចំនួនគត់ខុសគ្នាដែរ។ វាមិនអាច ព្រោះ7 ជាចំនួនបឋម អាចបំបែកបាន តែ២កត្តាប៉ុណ្ណោះ គឺ 7.1 ។

269. **ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ៣ចំនួនគត់តរៀងគ្នា មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ (មានន័យថា ជាចំនួនការេ រឺចំនួនគូប។ល។)**

ចំលើយ

ពិនិត្យចំនួនគត់ $(n-1)n(n+1)=n\left(n^2-1\right)$ ។ ដោយ n និង n^2-1 បឋមរវាងគ្នា នោះ ដើម្បីអោយផលគុណចំនួនទាំង២ជាចំនួនស្វ័យគុណទី $k\geq 2$ នោះ វាត្រូវតែ n^2-1 ជាចំនួនស្វ័យគុណទី k និង n ជាចំនួនស្វ័យគុណទី k ដែរ។ ដូច្នេះ $n^2-1=p_1^k$ និង $n=p_2^k>1$ ដែល p_1 បឋមនឹង p_2 ។ យើងទាញបាន $p_2^{2k}-1=p_1^k \Rightarrow$ $p_2^{2k}-p_1^k=1 \Rightarrow \left(p_2^2-p_1\right)\left(\left(p_2^2\right)^{k-1}+\left(p_2^2\right)^{k-2}p_1+\ldots+p_1^{k-1}\right)=1$ ។ ចំពោះ $k\geq 2$ និង ចំពោះ $p_1\geq 1,$ និង $p_2\geq 2$ យើងមានកត្តាទី២នៃអង្គខាងឆ្វេងធំជាង ១ ដូច្នេះ អង្គខាងឆ្វេងនិងស្តាំមិនអាចស្មើគ្នាបានទេ។

270. **ចូរបង្ហាញថា** $m^5+3m^4n-5m^3n^2-15m^2n^3+4mn^4+12n^5$ **មិនអាចស្មើ៣៣ទេ។**

ចំលើយ

$$m^5+3m^4n-5m^3n^2-15m^2n^3+4mn^4+12n^5$$
$$=(m-2n)(m-n)(m+n)(m+2n)(m+3n)$$

បើ $n\neq 0$ នោះ កត្តាផលគុណខាងលើខុសគ្នាទាំងអស់។ ដូច្នេះយើងមានទាំងអស់៥កត្តា។ យើងមាន $33=(-11)(3)(1)(-1)$ មានន័យថា 33 អាចបំបែកបានជាផលគុណនៃយ៉ាងច្រើន៤ចំនួនគត់ផ្សេងគ្នា។ វាមិនអាចស្មើគ្នាទេ។
បើ $n=0$ កន្សោមខាងលើទៅជា m^5 ហើយវាក៏មិនអាចស្មើ៣៣ដែរ។

271. ចូរបង្ហាញថា ផលបូក $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}$ មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ។

ចំលើយ

គេអោយ n ។ តាង k ជាចំនួនគត់ធំបំផុតដែល $2^k \le n$ និង តាង P ជាផលគុណនៃគ្រប់ចំនួនគត់សេសធំមិនលើសពី n ។ យើងមាន $2^{k-1}P.S$ ជាផលបូក ដែលតួនិមួយៗជាចំនួនគត់ទាំងអស់ លើកលែងតែ $2^{k-1}P\frac{1}{2^k}$ ។ ដូច្នេះ $2^{k-1}P.S$ មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ។ មានន័យថា S មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ។

272. ចូរបង្ហាញថា គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយគត់ ដែល $2^8+2^{11}+2^n$ ជាចំនួនការេ។

ចំលើយ

បើ $k^2=2^8+2^{11}+2^n=2304+2^n=48^2+2^n$ នោះ

$k^2-48^2=(k-48)(k+48)=2^n$ ។ យើងទាញបាន

$k-48=2^s, k+48=2^t, s+t=n$ ។ តែ $2^t-2^s=96=3.2^5$ រឺក៏

$2^s\left(2^{t-s}-1\right)=2^5.3$ ។ យើងទាញបាន $s=5, t-s=2, t=7$ ។ ដូច្នេះ $n=t+s=12$ ។

273. ចូរបង្ហាញថា នៅក្នុងគ្រប់សំនុំទាំងអស់ដែលមានធាតុជា៣៣ចំនួនគត់ខុសៗគ្នា ដែលចំនួនគត់និមួយៗមានកត្តាបឋមក្នុងចំនោម $\{5,7,11,13,23\}$ គេមានធាតុ២ដែលផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ។

ចំលើយ

ចំនួនដែលជាធាតុរបស់សំនុំនោះ មានរាង

$$5^a 7^b 11^c 13^d 23^f$$

ដូច្នេះ ធាតុនិមួយៗ មាន(a,b,c,d,f) មួយបែប។ បើគិតពីលក្ខណៈគូសេស នៃ a,b,c,d,f យើងមានបន្សំ (a,b,c,d,f) ចំនួន៣២បែប។ ឧទាហរណ៍ (គូ,សេស, សេស,គូ,សេស) ជាករណី១ក្នុងចំណោមករណីទាំង៣២នោះ។ ដោយយើងមាន៣៣ចំនួនគត់នោះត្រូវតែមានចំនួនគត់២ ដែលមាន (a,b,c,d,f) តំរៀបតាមលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា។ ដូច្នេះផលគុណនៃ២ចំនួននេះជាចំនួនការេ។

274. **(គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៨៥) គេអោយសំនុំ M មាន១៩៨៥ធាតុជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា។គ្មានធាតុណាមួយមានកត្តាបឋមធំជាង២៦ទេ។ ចូរបង្ហាញថា M មានសំនុំរងមួយ ដែលមាន៤ធាតុខុសៗគ្នា ដែលផលគុណជាចំនួនស្វ័យគុណទី៤។**

ចំលើយ

ចំនួននិមួយៗស្ថិតនៅក្នុងសំនុំ M មានរាង

$$2^a 3^b 5^c 7^d 11^f 13^g 17^h 19^j 23^k$$

បើគិតតាមលក្ខណៈគូសេស យើងមាន (a,b,c,d,f,g,h,j,k) ចំនួន $2^9=512$ បែប។ ដូច្នេះបើយើងចាប់យក៥១៣ធាតុ នោះ យើងនឹងទទួលបានធាតុ២ខុសគ្នាដែលមាន (a,b,c,d,f,g,h,j,k) មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ដូច្នេះធាតុ២នេះមានផលគុណជាចំនួនការេ។

ដោយយើងមាន$1985>513$ នោះយើងអាចរកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_1,b_1 ដែល $a_1b_1=c_1^2$ ។ យើងដកមួយគូនេះចេញ។ ពីក្នុងចំណោម $1983>513$ នៅសល់ យើងអាច

រកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_2,b_2 ដែល $a_2b_2=c_2^2$ ។ យើងដកមួយគូនេះចេញ។ ពីក្នុងចំណោម $1981>513$ នៅសល់ យើងអាចរកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_3,b_3 ដែល $a_3b_3=c_3^2$ ។ យើងបន្តដកយក រហូតបាន n គូ ដែល $1985-2n\geq 513$ មានន័យថា $n=736$ ។ ដូច្នេះ យើងអាចប្រមូលបាន៧៣៧គូចំនួនគត់ខុសគ្នាដែល $a_kb_k=c_k^2$ ។ បន្ទាប់មកទៀតបណ្ដា៧៣៧ចំនួនគត់c_k មានតួចែកបឋមរបស់វាតូចជាងរឺស្មើ២៦ ហើយដោយ $737>513$ នោះ យើងអាចរកបានចំនួនគត់c_k ២ខុសគ្នា តាងដោយc_i និង$c_j, i\neq j$ ដែល $c_ic_j=a^2$ ។ ដូច្នេះ $a_ib_ia_jb_j=a^4$ ជាចំនួនស្វ័យគុណទី៤។ ដូច្នេះមានន័យថា យើងអាចរកបាន៤ចំនួនគត់ដែលមានផលគុណរបស់ជាចំនួនស្វ័យគុណទី៤។

275. គេជ្រើសរើសយក៥១ចំនួនគត់ពីក្នុងចំនោម $1,2,\ldots,100$ ។ចូរបង្ហាញថា ទោះគេចាប់យ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គង់តែមានមួយចែកដាច់មួយទៀតដែរ។

ចំលើយ

គ្រប់ចំនួនគត់ក្នុងចំនោម៥១ចំនួនគត់នោះ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង 2^am បានទាំងអស់ ដែល m ជាចំនួនសេស $(3=2^0.3\,,4=2^2.1,\ldots)$។ ដោយយើងមាន ចំនួនសេសតែ៥0 ចន្លោះ១និង១០០ នោះ គេមានm ចំនួនតែ៥0ប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ ក្នុងចំណោម៥១ចំនួនគត់ ត្រូវតែមាន២ដែលមានm មានតំលៃដូចគ្នា។ ដូច្នេះ ករណីនេះលេខតូចចែកដាច់លេខធំ។

276. (អាមេរិច ១៩៧២) ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$$

ចំលើយ

តាង

$$a=\prod p_k^{\alpha_k}, b=\prod p_k^{\beta_k}, c=\prod p_k^{\gamma_k}$$

ដែល p_k ជាចំនួនបឋម។ សំនើខាងលើសមមូលនឹង

$$2\max(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)-\max(\alpha_k,\beta_k)-\max(\alpha_k,\gamma_k)-\max(\beta_k,\gamma_k)$$
$$=2\min(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)-\min(\alpha_k,\beta_k)-\min(\alpha_k,\gamma_k)-\min(\beta_k,\gamma_k)$$

យើងសន្មតថា $\alpha_k \geq \beta_k \geq \gamma_k$ ។ សមភាពខាងលើទៅជា

$$2\alpha_k-\alpha_k-\beta_k=2\gamma_k-\beta_k-\gamma_k-\gamma_k \quad \text{ពិត។}$$

277. **ចូរបង្ហាញថា $n=24$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលចែកដាច់នឹងគ្រប់ចំនួនគត់ a ដែល $1\leq a\leq\sqrt{n}$ ។**

ចំលើយ

សន្មតថា n ចែកដាច់នឹងគ្រប់ចំនួនគត់$\leq\sqrt{n}$ ។ តាង $p_1=2, p_2=3,\dots\ p_l$ ជាបណ្តាចំនួនបឋម $\leq\sqrt{n}$ ហើយតាង k_j ជាចំនួនគត់មួយដែល $p_j^{k_j}\leq\sqrt{n}<p_j^{k_j+1}$ ។ ដូច្នេះ $n^{l/2}<p_1^{k_1+1}p_2^{k_2+1}\dots.p_l^{k_l+1}$ ។

តាង $PPCM\left(1,2,3,\dots,\left[\sqrt{n}-1\right],\left[\sqrt{n}\right]\right)=K$,($[x]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ x)។ ដូច្នេះ $K=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots.p_l^{k_l}$ ។ដូច្នេះ $p_1^{k_1+1}p_2^{k_2+1}\dots.p_l^{k_l+1}\leq K^2$ ។ ដូច្នេះ $n^{l/2}<K^2$ ។ តាមសម្មតិកម្ម n ត្រូវចែកដាច់នឹងK ហើយដូច្នេះ $K\leq n$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា $n^{l/2}<n^2$ ។ មានន័យថា $l<4$ និង ដូច្នេះ $n<49$ ។ តាមរយៈការពិនិត្យ យើងឃើញថា n ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $n=2,4,6,8,12,24$ ។

278. **ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មានលក្ខណៈ**

"ចំពោះ $0<l<m<n$ គេមាន $S=l+(l+1)+...+m$ ចែកមិនដាច់នឹង n ចំពោះគ្រប់ l,m,n ។" ចូរបង្ហាញថា លក្ខណៈនេះ អាចកើតមានតែក្នុងករណី n ជាស្វ័យគុណនៃ២មួយប៉ុណ្ណោះ។

ចំលើយ

តាង $n=s.2^k$ ដែល s ជាចំនួនសេស។ បើ $s=1$ នោះ $2S=(l+m)(m-l+1)$ ដែលមានកត្តាមួយជាចំនួនគូ និងកត្តាមួយជាចំនួនសេស។ កត្តាគូ មានតំលៃ $<2n$ ។ ដូច្នេះ $2S$ មិនអាចចែកដាច់នឹង$2n=2^{k+1}$ ទេ ។

តែ បើ $s>1$ នោះ S ចែកដាច់នឹង n ចំពោះគ្រប់ $0<l<m<n$ ដោយយក

$$m=\frac{1}{2}\left(s+2^{k+1}-1\right)$$

និង

$$l=\begin{cases}1+m-2^{k+1}, s>2^{k+1}\\ 1+m-s, s<2^{k+1}\end{cases}$$

279. **តាង $0<a_1<a_2<...<a_k\le n$ ដែល $k>\left[\frac{n+1}{2}\right]$ជាចំនួនគត់។**

ចូរបង្ហាញថា $a_1+a_j=a_r$ មានចំលើយ។

ចំលើយ

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a_i ,$1\le i\le k$ មានចំនួន k ។ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x_i=a_i-a_1, 2\le i\le k$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ហើយមានចំនួនសរុប $k-1$ ។ សំនុំ $\{a_i, x_i\}$ មានធាតុសរុបចំនួន

$2k-1>n$ បើ $k \ge \left[\frac{n+1}{2}\right]$។ ធាតុនិមួយៗនៃសំនុំនេះ មានតំលៃធំមិនលើសពី n ទេ ដូច្នេះវាត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុ២ដែលមានតំលៃស្មើគ្នា។ ដោយ x_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ និង a_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ដែរ នោះ ធាតុ២ដែលស្មើគ្នានោះ ត្រូវតែជា a_j ណាមួយ និង x_r ណាមួយ។ ដូច្នេះ $x_r = a_r - a_1 = a_j \Rightarrow 1 + a_j = a_r$ ។

ស្មឹត $a_1 = [n/2]+1, a_2 = [n/2]+2, ..., a_k = n$ ដែល $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$។ យើងមាន $2a_1 = 2\left[\frac{n}{2}\right]+2$ ។ បើ $n = 2m$ នោះ $2a_1 = 2m+2 > n = 2m$ មិនអាចមានតួណាដែល $1+a_j = a_r$។ បើ $n = 2m+1$ នោះ $2a_1 = 2m+2 > 2m+1 \Rightarrow$ មិនអាចមានតួណាដែល $1+a_j = a_r$។ ដូច្នេះករណី $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ សមីការគ្មានចំលើយ។ ដូច្នេះហើយវាត្រូវតែ $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$។

280. **តាង $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n \le 2n$ ជាចំនួនគត់ដែល ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃរាល់បណ្តា a_i, ២ៗមានតំលៃធំជាង $2n$។ ចូរបង្ហាញថា $a_1 > \left[\frac{2n}{3}\right]$។**

ចំលើយ

យើងឃើញថា គ្មានចំនួនណាមួយដែលចែកដាច់មួយទៀតទេ បើមិនអញ្ចឹង យើងនឹងមាន $PPCM \le 2n$ ។ ដូច្នេះ $a_k = 2^{t_k} A_k$ ដែល A_k ជាចំនួនសេស។ យើងឃើញថា A_k ខុសគ្នាទាំងអស់។ ដោយយើងមាន A_k ទាំងអស់ចំនួន n ដូច្នេះ សំណុំរបស់ A_k ដូចគ្នានឹងសំណុំចំនួនគត់សេសវិជ្ជមាន ដែលតូចជាង $2n$ ។

ឥឡូវយើង យើងពិនិត្យ $a_1 = 2^{t_1} A_1$ ។ បើ $a_1 \le \left[\frac{2n}{3}\right]$ នោះ $3a_1 = 2^{t_1} 3A_1 \le 2n$ និង $3A_1 < 2n$ ។ ដូច្នេះ $3A_1$ ជាចំនួនសេសដែល $< 2n$ ដូច្នេះ $2A_1 = A_j$ ចំពោះតំលៃ j ណាមួយ និង $a_j = 2^{t_j} 3A_1$ ។ ដូច្នេះ $\left[a_1, a_j\right] = 2^{t_1} 3A_1 = 3a_1 \le 2n$ រឺក៏ $\left[a_1, a_j\right] = 2^{t_1} 3A_1 = a_j \le 2n$ ។ ដូច្នេះវាផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។

281. ចូរគណនាចំនួននៃចតុធាតុ (a,b,c,d) ដែល

$$3^r 7^s = [a,b,c] = [b,c,d] = [c,d,a] = [d,a,b]$$

ចំលើយ

តាមទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃចំនួននព្វន្ត យើងទាញបាន a,b,c,d ត្រូវតែមានរាង $3^m 7^n, 0 \le m \le r, 0 \le n \le s$ ។ ជាងនេះទៅទៀត ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុ២ក្នុងចំនោមធាតុទាំង៤ ដែល m ត្រូវស្មើនឹងr ហើយនិង ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុ២ក្នុងចំនោមធាតុទាំង៤ ដែល n ត្រូវស្មើនឹង s ។ យើងពិនិត្យករណី m សិន។ យើងមាន ករណី (១) a,b,c,d ទាំង៤មាន $m = r$ ដូចគ្នា (យើងមាន ១ករណី)។ (២) មាន៣ក្នុងចំនោម a,b,c,d មាន $m = r$ ហើយមួយទៀត មាន $0 \le m < r$ (យើងមាន $3r$ ករណី ព្រោះក្នុងការជ្រើសរើសចំនួនទី៤និមួយៗដែល $0 \le m < r$ យើងមាន r ករណី ហើយ ក្នុងការជ្រើសរើស យក៣ក្នុងចំនោម៤ ដែល $m = r$ យើងមាន $\binom{4}{3} = 3$ ករណី ដូច្នេះសរុបមាន $3r$ ករណី។)។ (៣) មាន២ក្នុងចំនោម a,b,c,d មាន $m = r$ ហើយ២ទៀត មាន $0 \le m < r$ (ដូច្នេះមាន $6r^2$ ករណី ព្រោះ ក្នុងការជ្រើសរើសចំនួនទី៣ និង ៤និមួយៗដែល $0 \le m < r$ យើងមាន r^2 ករណី ហើយ ក្នុងការជ្រើសរើស យក២ក្នុងចំនោម៤ ដែល $m = r$ យើងមាន $\binom{4}{2} = 6$ ករណី ដូច្នេះសរុបមាន $6r^2$ ករណី។)។ ដូច្នេះ មានទាំងអស់

$1+4r+6r^2$ បែបក្នុងការជ្រើសរើសអោយបានយ៉ាងហោចណាស់ ២ក្នុងចំណោម៤ ដើម្បីអោយបានស្វ័យគុណr ។ ដូចគ្នា មានទាំងអស់ $1+4s+6s^2$ បែបក្នុងការជ្រើសរើសអោយបានយ៉ាងហោចណាស់២ក្នុងចំណោម៤ ដើម្បីអោយបានស្វ័យគុណs ។
ដូច្នេះជាសរុបគេមានចតុធាតុទាំងអស់ចំនួន

$$\left(1+4r+6r^2\right)\left(1+4s+6s^2\right)$$

282. ចូរបង្ហាញថា $\log_{10} 7$ ជាចំនួនអសនិទាន។

283. ចូរបង្ហាញថា $\frac{\log 3}{\log 2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

284. ចូរគណនាចំនួនគត់តូចបំផុតដែល $n/2$ ជាចំនួនការេ និង $n/3$ ជាចំនួនគូប។

285. តើមានចំនួនគត់ចាប់ពី ១ដល់10^{20} ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលមិនមែនជាចំនួនការេ ចំនួនគូប រឺ ចំនួនស្វ័យគុណ៥?។

286. ចូរបង្ហាញថា ផលបូក

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$$

មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ។ (ណែនាំ៖ ពិនិត្យ ចំនួនធំបំផុត ដែល ជា ស្វ័យគុណ នៃ ៣ ដែល$\le n$)

287. គណនា $\min\limits_{k\ge1} 36^k-5^k$ (ណែនាំ៖ $36^k-1-5^k\ne 0$?)

288. (អាមេរិច ១៩៨៧) ចូរគណនា ចំនួននៃត្រីធាតុរៀបតាមលំដាប់រួចហើយ (a,b,c) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $[a,b]=1000, [b,c]=[a,c]=2000$ ។

289. តើមានប៉ុន្មានបែប ក្នុងការបំបែក១៣៣២ ជាផលគុណនៃ២ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលបឋមនឹងគ្នា ដែលនិមួយៗធំជាង១។ ផលគុណកត្តា ដោយគ្រាន់តែខុសគ្នា

មួយមុខមួយក្រោយរាប់ថាតែមួយ (កត្តា $a.b$ និង $b.a$ គិតថាតែមួយ បែប)។(ចំលើយ ៣បែប)។

290. តាង $p_1, p_2, ..., p_t$ ជាចំនួនបឋមផ្សេងៗគ្នា និង $a_1, a_2, ..., a_t$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិផ្សេងគ្នា។ តើមានប៉ុន្មានបែប ក្នុងការបំបែក $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_t^{a_t}$ ជាផលគុណនៃ២ចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមនឹងគ្នា ដែលនិមួយៗធំជាង១។ ផលគុណកត្តា ដោយគ្រាន់តែខុសគ្នាមួយមុខមួយក្រោយរាប់ថាតែមួយ។ (ចំលើយ $2^{t-1} - 1$)

291. តាង $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_t^{a_t}$ និង $m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_t^{b_t}$ ដែលក្នុងនោះ $p_1, p_2, ..., p_t$ ជាចំនួនបឋមផ្សេងៗគ្នា។ គណនា ចំនួនកត្តារួមរបស់ និង ។ (ចំលើយ $\prod_{k=1}^{t} \left(1 + \min\left(a_k, b_k\right)\right)$)។

292. (អាមេរិច ១៩៧៣) ចូរបង្ហាញថា រឺសទី៣ នៃ៣ចំនួនបឋមខុសគ្នា មិនអាចជាតួ៣នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយទេ (មិនចាំបាច់ជាតួបន្តបន្ទាប់គ្នាក៏បាន)។

293. តាង $2 = p_1, 3 = p_2, ...$ ជាចំនួនបឋមបន្តបន្ទាប់គ្នា។ សន្មតថា $n \geq 10$ និង ថា $1 < j < n$។ តាង

$$N_1 = p_1 p_2 .... p_{j-1} - 1,\ N_2 = 2 p_1 p_2 .... p_{j-1} - 1, ...$$

និង $$N_{p_j} = p_j p_1 p_2 .... p_{j-1} - 1$$

ចូរបង្ហាញថា

១) គ្រប់ $p_i, j \leq i \leq n$ ចែកដាច់យ៉ាងច្រើន មួយក្នុងចំនោម $N_{p_k}, 1 \leq k \leq j$។

២) គេមាន j មួយ ដែល $1 < j < n$ ដែល $p_j > n - j + 1$។

៣) តាង s ជាតំលៃរបស់ j តូចបំផុត ដែល $p_j > n-j+1$។ ចូរបង្ហាញថា គេមានt មួយ $1 \le t \le p_s$ ដែល $p_1, p_2, ..., p_n$ មិនអាចចែកដាច់ $tp_1, p_2, ..., p_{s-1} - 1$ និង បង្ហាញថា $p_{n+1} < p_1 p_2 ... p_s$។

៤) ចូរបង្ហាញថា s ខាងលើធំជាង៤ និង ថា $p_{s-1} - 2 \ge s$ និងថា $p_1 p_2 ... p_s < p_{s+1} ... p_n$។

៥)(វិសមភាពBonse) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $n \ge 4, p_{n+1}^2 < p_1 ... p_n$។

294. ចូរបង្ហាញថា ៣០ ជាចំនួនគត់n តែមួយគត់ ដែលមានលក្ខណៈ៖ បើ$1 \le t \le n$ និង $(t,n) = 1$ នោះ t ជាចំនួនបឋម។

295. (អាមេរិច ១៩៨៤)

១) ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីអោយគេមាន សំនុំកំនត់S_n មួយនៃ n ចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសគ្នា ដែល រាល់មធ្យមធរណីមាត្រនៃសំនុំរងរបស់S_n ជាចំនួនគត់។

២) តើមានសំនុំមិនកំនត់S ណាមួយ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល មធ្យមធរណីមាត្រនៃរាល់សំនុំរងកំនត់របស់S ជាចំនួនគត់ រឺទេ?។

296. ១) ចូរបង្ហាញថា គ្មានត្រីធាតុនៃចំនួនគត់ (a,b,c) ណាមួយ ក្រៅពី $(a,b,c) = (0,0,0)$ ដែល

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$$

២) ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ a,b,c ដែលមិនសូន្យទាំងអស់គ្នា និង ដែលនិមួយៗមានតំលៃ ដាច់ខាតតូចជាង ១លាន ដែល

$$\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}$$

៣) តាង a,b,c ជាចំនួនគត់ដែលមិនសូន្យទាំងអស់គ្នា និង ដែលនិមួយៗមានតំលៃដាច់ខាត តូចជាង ១លាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right|>10^{-21}$$

297. (ហុងគ្រី 1906) តាង $a_1,a_2,...,a_n$ ជាចំលាស់ណាមួយនៃ បណ្តា $1,2,...,n$។ ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនសេស នោះផលគុណ

$$(a_1-1)(a_2-2)...(a_n-n)$$

ជាចំនួនគូ។

298. ចូរបង្ហាញថា ពីក្នុងចំនោមស៊េរីនៃចំនួនគត់ដែលបានមកពីការរំរៀបតាមរបៀបណាមួយ នៃចំនួនគត់ពី១ដល់១០១ គេតែងតែអាចជ្រើសរើសបាន ១១តួ (ដែលមិនចាំបាច់ត្រូវតែជាតួបន្តបន្ទាប់គ្នារបស់ស៊េរីនេះ) ដែលអាចបង្កើតបានជាស៊េរីកើន រឺ ចុះ។

299. ចូរបង្ហាញថា ពីក្នុងចំនោម៥២ចំនួនគត់ គេតែងតែអាចជ្រើសរើសបានចំនួនគត់២ ដែលមានផលបូក រឺក៏មិនអញ្ចឹងទេ ផលសង ដែលចែកដាច់នឹង ១០០។

300. ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំនោម១០០ចំនួនគត់ គេតែងតែអាចជ្រើសរើសបានចំនួនជាច្រើន(រឺជួនកាលអាចមានតែមួយ) ដែលមានផលបូកស្មើ១០០។

301. គេអោយ n ចំនួន $x_1,x_2,...,x_n$ ដែលនិមួយៗ ស្មើ ±1។ ចូរបង្ហាញថា បើ

$$x_1x_2+x_2x_3+...+x_nx_1=0$$

នោះ n ជាពហុគុណនៃ ៤។

302. ប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

តាង a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បន្ទាប់ធ្វើប្រមាណវិធីចែកបន្តបន្ទាប់គ្នា យើងទាញបានស៊េរីនៃវិសមភាពដូចតទៅ៖

$$a = bq_1 + r_2; \quad 0 < r_2 < b$$

$$b = r_2q_2 + r_3; \quad 0 < r_3 < r_2$$

$$r_2 = r_3q_3 + r_4; \quad 0 < r_4 < r_3$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n; \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_nq_n$$

ស៊េរីនៃសំណល់នឹងទៅដល់ r_{n+1} ដែលនឹងស្មើ0។ ដោយ $b, r_2, r_3, \ldots.$ ជាស្វ៊ីតចុះនៃបណ្ដាចំនួនគត់ ដូច្នេះ ស្វ៊ីតនេះ មិនអាចចំនួនតួវិជ្ជមានលើសពីb ទេ។ ប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ តាមពិតទៅគឺជា

$(a,b) = (b,r_2) = (r_2,r_3) = \ldots = (r_{n-1},r_n) = r_n$ ។

303. ទ្រឹស្ដីបទ

ចូរបង្ហាញថា បើ a,b,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ

$$(a,b) = (a+nb,b)$$

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $d = (a,b)$ និង $c = (a+nb,b)$ ។ ដោយ $d \mid a$ និង $d \mid b$ នោះ $d \mid (a+nb)$ ។
ដូច្នេះ d ជាតួចែករួមរបស់ b និង $a+nb$ ។មានន័យថា$d \mid c$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត $c|(a+nb)$ នោះ $c|(a+nb-nb)=a$ ។ ដូច្នេះ c ជាតួចែករួមនៃa និងb មានន័យថា $c|d$ ។ ដូច្នេះ $d|c$ និង $c|d$ នាំអោយ $c=d$ ។

304. ចូរគណនា $(3456,246)$

ចំលើយ

$(3456,246)=(13.246+158,246)=(158,246)$

$(158,246)=(158,158+88)=(88,158)$

$(88,158)=(70,88)=(18,70)=(16,18)=(2,16)=2$

ដូច្នេះ $(3456,246)=2$

305. ទ្រឹស្តីបទ

បើ r_n ជាសំនល់ចុងក្រោយ មុនសូន្យ នៅក្នុងប្រមាណវិធីចែកអឺគ្លីដ នោះ

$$r_n=(a,b)$$

សំរាយបញ្ជាក់

$r_2=a-bq_1$

$r_3=b-r_2q_2$

$r_4=r_2-r_3q_3$

$r_n=r_{n-2}-r_{n-1}q_{n-1}$

$r_{n+1}=0=r_{n-1}-r_nq_n$

តាង $r=(a,b)$ ។ សមីការទីមួយ នាំអោយ $r|r_2$ ។ ទី២នាំអោយ $r|r_3$ ។ បន្តបន្ទាប់មកទៀត $r|r_n$ ។

តែដោយចេញពីសមីការចុងក្រោយវិញ ហើយបកទៅលើ យើងឃើញថា

$r_n \mid r_{n-1}, r_n \mid r_{n-2}, \ldots, r_n \mid b, r_n \mid a,$

ដូច្នេះ r_n ជាតួចែករួមរបស់ a និង b ដូច្នេះ $r_n \mid (a,b)$ រឺក៏ $r_n \mid r$ ។ មានន័យថា $r_n = r$ ។

306. គណនា $(23,29)$

ចំលើយ

យើងមាន

$$29 = 1.23 + 6$$

$$23 = 3.6 + 5$$

$$6 = 1.5 + 1$$

$$5 = 5.1 + 0$$

សំនល់មុនសូន្យគឺ ១ ដូច្នេះ $(23,29) = 1$ ។

307. ចូរគណនាចំនួនគត់ x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$23x + 29y = 1$$

ចំលើយ

សមីការដែលចំលើយរបស់វាជាចំនួនគត់ហៅថា**សមីការដ្យូផង់**។ យើងឃើញថា

សមីការដ្យូផង់

$$ax + by = c$$

មានចំលើយជាចំនួនគត់ តែក្នុងករណី $(a,b)|c$ ប៉ុណ្ណោះ។ ប្រមាណវិធីរបស់អឺគ្លីដជាមធ្យោបាយដ៏មានប្រសិទ្ធិភាពមួយ ក្នុងការស្វែងរកចំលើយរបស់សមីការនេះ។ យើងមាន

$$1 = 6 - 1.5$$

$$5 = 23 - 3.6$$

$$6 = 29.1 - 23$$

ដូច្នេះ

$$1 = 6 - 1.5$$
$$1 = 6 - 1.(23 - 3.6)$$

$$1 = 4.6 - 1.23$$
$$1 = 4.(29.1 - 23) - 1.23$$

$$1 = 4.29 - 5.23$$

ដូច្នេះចំលើយរបស់សមីការនេះ គឺ $x_0 = -5, y_0 = 4$ ។ យើងឃើញថា

$$x = -5 + 29t, y = 4 - 23t, t \in \mathbb{Z}$$

ក៏ជាចំលើយរបស់សមីការនេះដែរ។

308. គណនាចំលើយសមីការដ្យូផង់ខាងក្រោម

$$23x + 29y = 7$$

ចំលើយ

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើបង្ហាញថា

$$23(-5) + 29(4) = 1$$

គុណអង្គសង្ខាងនៃសមីការនឹង 7 យើងទាញបាន

$$23(-35)+29(28)=7$$

ដូច្នេះ $x=-35+29t, y=28-23t, t\in\mathbb{Z}$ ។

309. តើមានចំនួនគត់ x, y ដែល $3456x+246y=73$ រឺទេ?។

ចំលើយ

ដោយ $(3456,246)=2$ មានន័យថា អង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង 2 តែអង្គខាងស្តាំចែកមិនដាច់នឹង២ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយជាចំនួនគត់។

310. ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថា a,b,c ជាចំនួនគត់ដែល $(a,b)\mid c$។ បើគេស្គាល់គូចំលើយ (x_0,y_0) នៃសមីការដ្យូផង់ $ax+by=c$ នោះចំលើយផ្សេងទៀតនៃសមីការនេះ នឹងមានរាង

$$x=x_0+t\frac{b}{d}, y=y_0-t\frac{a}{d}$$

ដែល $d=(a,b)$ និង $t\in\mathbb{Z}$។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងថា បើ (x_0,y_0) ជាចំលើយរបស់សមីការ $ax+by=c$ នោះ $x=x_0+t\dfrac{b}{d}, y=y_0-t\dfrac{a}{d}$ ក៏ជាចំលើយដែរ។ តែយើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំលើយទាំងអស់ នឹងមានរាងបែបនេះទាំងអស់។

សន្មតថា (x', y') ផ្ទៀងផ្ទាត់ $ax' + by' = c$ ។ ដូចគ្នាដែរ $ax_0 + by_0 = c$ ។ ដូច្នេះយើងមាន

$$a(x' - x_0) = b(y_0 - y')$$

ចែកអង្គទាំង២នឹង $d = (a, b)$

$$\frac{a}{d}(x' - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y')$$

ដោយ $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ នោះ $\frac{a}{d} \mid (y_0 - y')$ ដោយយោលតាមវិបាកអឺគ្លីដ។ ដូច្នេះគេមានចំនួនគត់ t ដែល $t\frac{a}{d} = y_0 - y'$ នាំអោយ $y = y_0 - t\frac{a}{d}$ ។ ចេញពីនេះ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{d}(x' - x_0) = \frac{b}{d}t\frac{a}{d}$$

មានន័យថា $x' = x_0 + t\frac{b}{d}$ ។

311. ចូររកចំលើយជាចំនួនគត់ នៃសមីការ

$$3456x + 246y = 234$$

ចំលើយ

យើងមាន $3456(-1) + 246(15) = 234$ ។

យើងទាញបាន $x = -1 + 123t, y = 15 - 1728t, t \in \mathbb{Z}$ ។

312. ដោះស្រាយសមីការដ្យូផង់ខាងក្រោម

១) $24x + 25y = 18$

២) $3456x + 246y = 44$

៣) $1998x+2000y=33$

313. ចូរបង្ហាញថាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណដែលមានកំពូលត្រង់ $(0,0)$, (b,a), (x,y) កំនត់ដោយ $\frac{|by-ax|}{2}$។

314. ស្ត្រីម្នាក់ចំនាយ \$2.78 ដើម្បីទិញចេក និងស៊ុត។ ចេកមួយថ្លៃ\$0.69 និងស៊ុតមួយថ្លៃ\$0.35។ តើស្ត្រីនោះទិញចេកនិងស៊ុតចំនួនប៉ុន្មាន?។

315. និយមន័យ–សមីការសមមូលលីនេអ៊ែរ

សមីការសមមូលអញ្ញាត x មួយកំនត់ដោយ $ax\equiv b \bmod n$។ កន្សោម $ax\equiv b \bmod n$ មានន័យថាមាន $t\in\mathbb{Z}$ ដែល $ax=b+nt$។ ដូច្នេះ សមីការសមមូលអញ្ញាត x ដែល $ax\equiv b \bmod n$ មានចំលើយ លុះត្រាតែសមីការដ្យូផង់ $ax+ny=b$ មានចំលើយ និងច្រាសមកវិញ។ ដូច្នេះ យើងឃើញថា សមីការសមមូល

$$ax\equiv b \bmod n$$

មានចំលើយតែក្នុងករណី $(a,n)\mid b$ មួយប៉ុណ្ណោះ។

316. ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយចំនួនគត់ a,b,n។ បើសមីការសមមូល $ax\equiv b\pmod n$ មានចំលើយមួយ នោះ វាមានចំលើយមិនសមមូលគ្នា តាម n ចំនួន (a,n)។

សំរាយបញ្ជាក់

ពីទ្រឹស្តីបទ៣១០ យើងទាញបាន សមីការដ្យូផង់លីនេអ៊ែរ $ax+ny=b$ មានចំលើយ មានរាង

$$x=x_0+n\frac{t}{d}, y=y_0-a\frac{t}{d}, d=(a,n), t\in\mathbb{Z}$$

យើងអោយt មានតំលៃ $t=0,1,...,(d-1)$ យើងទាញបាន ចំលើយមិនសមមូល គ្នាតាម n ចំនួនd ព្រោះតំលៃដាច់ខាតនៃផលសងរវាងចំលើយទាំងនោះ២ៗមានតំលៃ តូចជាង n ។ បើ $x=x_0+n\frac{t'}{d}$ ជាចំលើយមួយផ្សេងទៀត នោះយើងសរសេរ t' ជា $t'=qd+r, 0\le r<d$ ។ នោះ

$$\begin{aligned} x &= x_0+n\frac{qd+r}{d} \\ &= x_0+nq+n\frac{r}{d} \\ &\equiv x_0+n\frac{r}{d} \pmod{n} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ គ្រប់ចំលើយទាំងអស់របស់សមីការសមមូល $ax\equiv b\pmod{n}$ សមមូលតាម n ទៅនឹងតំលៃមួយនិងតែមួយគត់ក្នុងតំលៃចំនួនd ផ្សេងៗគ្នានៃ $x_0+n\frac{t}{d}$, $0\le t\le d-1$ ។ ដូច្នេះ បើសមីការមានចំលើយមួយ នោះ មានចំលើយមិនសមមូលគ្នា តាមn ចំនួនd ។

317. ចូរគណនាចំលើយ របស់សមីការសមមូល

$$5x\equiv 3\pmod{7}$$

ចំលើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ៣១៦ សមីការនេះមានចំលើយតែមួយគត់តាម 7 ព្រោះ$(5,7)=1$ ។

ជាដំបូងយើងដោះស្រាយសមីការ $5x+7y=1$ ។

$$7=5.1+2$$

$$5=2.2+1$$

$$2=2.1$$

ដូច្នេះ

$$1=5-2.2$$

$$2=7-5.1$$

នាំអោយ

$$1=5-2.2=5-2(7-5.1)=5.3-7.2$$

ដូច្នេះ $3=5(9)-7(6)$ នាំអោយ $5.9\equiv 3\pmod 7$ ។ដូចគ្នាដែរ $5.2\equiv 3\pmod 7$ ។ ដូច្នេះ $x\equiv 2\pmod 7$ ។

318. ដោះស្រាយសមីការសមមូល $3x\equiv 6\pmod{12}$

ចំលើយ

ដោយ $(3,12)=3$ ហើយ $3|6$ នោះ សមីការសមមូលខាងលើ មានចំលើយ៣ដែលមិនសមមូលគ្នាតាម១២។ យើងពិនិត្យឃើញថា $x=2$ ជាចំលើយមួយ។ តាមទ្រឹស្តីបទ៣១០ គ្រប់ចំលើយទាំងអស់មានរាង $x=2+12\dfrac{t}{3}=2+4t, t\in\mathbb{Z}$ ។ ដោយអោយ $t=0,1,2$ នោះចំលើយមិនសមមូលគ្នាទាំង៣របស់សមីការសមមូលតាម១២គឺ $x=2,6,10$ ។

319. ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយចំនួនគត់ x, y និង ចំនួនគត់មិនសូន្យ a, n។ នោះ

$$ax \equiv ay \pmod{n}$$

លុះត្រាតែ $x \equiv y\left(\bmod \frac{n}{(a,n)}\right)$ **និងច្រាសមកវិញ។**

សំរាយបញ្ជាក់

បើ $ax \equiv ay \pmod{n}$ នោះ $a(x-y) = sn$ ចំពោះចំនួនគត់ s ណាមួយ។ ដូច្នេះ

$$(x-y)\frac{a}{(a,n)} = s\frac{n}{(a,n)}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ២១៩ យើងទាញបាន $\left(\frac{a}{(a,n)}, \frac{n}{(a,n)}\right) = 1$ ។ តាម ទ្រឹស្តីបទ២១៧ យើងទាញបាន

$$\frac{n}{(a,n)} \mid (x-y)$$

ដូច្នេះ

$$x \equiv y\left(\bmod \frac{n}{(a,n)}\right)$$

ច្រាសមកវិញ បើ $x \equiv y\left(\bmod \frac{n}{(a,n)}\right)$ នោះ

$$ax \equiv ay\left(\bmod \frac{an}{(a,n)}\right)$$

ដោយគុណអង្គទាំង២នឹងa ។ ដោយ (a,n)ចែកដាច់a នោះសមីការសមមូលខាងលើ នាំអោយយើងទាញបានថា $ax - ay = tn$ ចំពោះចំនួនគត់ t ណាមួយ។

320.កូរ៉ូលែ

បើ $ax \equiv ay \pmod{n}$ និង $(a,n)=1$ នោះ $x \equiv y \pmod{n}$

321.ទ្រឹស្តីបទប្រូបិន

គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b។ បើ $(a,b)=1$ នោះ ចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $ar+bs=m$ បាន ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន r,s ស្មើនឹង$(a-1)(b-1)/2$។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងសន្មតហៅថា n ជាចំនួនអាចបំបែកបាន តាម a,b បើសិនជាចំពោះចំនួនគត់ a,b ដែលអោយ នោះ គេមានចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន r,s ដែល $ar+bs=n$ ។

យើងពិនិត្យតារាងដែលចំនួនធាតុមិនកំនត់ខាងក្រោម

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & .... & k & .... & a-1 \\
a & a+1 & a+2 & .... & a+k & .... & 2a-1 \\
2a & 2a+1 & 2a+2 & .... & 2a+k & .... & 3a-1 \\
.... & .... & .... & .... & .... & ..... & ....
\end{array}$$

ជួរឈរនិមួយៗនៃតារាងនេះ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានផលសងរួមស្មើa ។ ចំនួននៅពីក្រោម n ក្នុងតារាងនេះ គឺ $n+ka$ ដែល k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ យើងដឹងថាបើ n អាចបំបែកបាន នោះ $n+ka$ ក៏អាចបំបែកបានដែរ ដូច្នេះនាំអោយយើងទាញបានថា បើចំនួនគត់n មួយអាចបំបែកបាន នោះគ្រប់ចំនួនគត់ដែលនៅពីក្រោមវាសុទ្ធតែអាចបំបែកបានទាំងអស់។ គ្រប់ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃb សុទ្ធតែអាចបំបែកបានទាំងអស់។ យើង

និយាយថា គ្មានចំនួនពហុគុណនៃb ២ខុសគ្នាតាងដោយ vb និងwb ដែល $0 \le v, w \le a-1$ អាចស្ថិតនៅក្នុងជួរឈរតែមួយនៃតារាងខាងលើបានទេ។ បើមិនអញ្ចឹងទេ នោះ យើងនឹងមាន $vb \equiv wb \pmod a$ ។នាំអោយ $b(v-w) \equiv 0 \pmod a$ ។ ដោយ $(a,b)=1$ និងដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ២១៧ យើងទាញបាន $v-w \equiv 0 \pmod a$ ។ ដោយ $0 \le v, w \le a-1$ នោះយើងទាញបាន $v = w$ ។

ឥលូវយើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ក្នុងតារាង ដែលនៅពីលើចំនួនមួយដែលជាពហុគុណនៃ b តាងដោយ$vb,\ 0 \le v \le a-1$ សុទ្ធតែជាចំនួនមិនអាចបំបែកបាន។ ចំពោះចំនួនដែលនៅពី vb មានរាង $vb-ka$ ចំពោះចំនួនគត់k មួយ។ បើ $vb-ka$ អាចបំបែកបានចំពោះ a,b នោះ $ax+by = vb-ka$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x,y ណាមួយ។$\Rightarrow$ $by \le ax+by = vb-ka < vb$ ។ ដូច្នេះ $0 \le y < v < a$ ។$\Rightarrow$ $y \not\equiv v \pmod b$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ២ចំនួនស្ថិតនៅលើជួរឈរតែមួយ សមមូលគ្នាតាម a ។$\Rightarrow$ $vb \equiv bv-ka \equiv ax+by \pmod a$ $\Rightarrow$ $bv \equiv by \pmod a$ ។ តាមក្បួនប្រែ ៣២០ យើងទាញបាន $v \equiv y \pmod a$ ។ តែយ៉ាងនេះ វាផ្ទុយនឹងការពិតដែល $0 \le y < v < a$ ។

ដូច្នេះ ចំនួននៃចំនួនមិនអាចបំបែកបានតាម a,b ស្មើនឹងចំនួននៃចំនួនដែលនៅពីលើចំនួនដែលមានរាង $vb, 0 \le v \le a-1$ ។ នៅលើជួរឈរទី j គេមានចំនួន$(vb-i)/a$ពីលើ vb ។ ដូច្នេះចំនួននៃចំនួនដែលមិនអាចបំបែកបានតាម a,b ស្មើនឹង

$$\sum_{v=0}^{a-1}\sum_{j=0}^{a-1}\frac{vb-j}{a} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

ចំនួនគត់ដែលមិនអាចបំបែកបានធំបំផុតស្ថិតនៅចំពីលើ$(a-1)b$ ដូច្នេះ ចំនួនគត់ដែលមិនអាចបំបែកបានធំបំផុត មានតំលៃស្មើនឹង $(a-1)b-a$ ។

322.ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយ a,b ជាចំនួនគត់ បឋមរវាងគ្នា។ សមីការ

$$ax+by=n$$

គ្មានចំលើយជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x,y ចំពោះ $n=ab-a-b$ ។ បើ $n>ab-a-b$ នោះ សមីការនេះ មានចំលើយជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

323.

ល្បែងបើកបៀក្នុងកុំព្យូទ័រមួយគេលេងតែម្នាក់ឯង ដូចតទៅ។ ក្រោយលេងជាប់មួយលើក ទៅតាមលទ្ធផលដែលទទួលបាន អ្នកលេងទទួលបាន a រឺ b ពិន្ទុ ($a,b\in\mathbb{N},a>b$) ហើយពិន្ទុរបស់គាត់កើនឡើងដោយបូកបន្ថែមនឹងពិន្ទុលើកមុន។ គេដឹងថា មានពិន្ទុចំនួន៣៥ប្រភេទដែលគេមិនអាចទទួលបាន ហើយក្នុងចំណោមនោះ មានមួយស្មើ៥៨។ ចូរគណនា a និង b ។

ចំលើយ

ពិន្ទុដែលគេអាចធ្វើបាន ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានដែលមានរាង $ax+by$ ។ បើ $(a,b)>1$ នោះមាន ចំនួនគត់ទាំងនេះច្រើនរាប់មិនអស់។ ដូច្នេះ $(a,b)=1$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទប្រូបិន ចំនួនពិន្ទុដែលមិនអាចទទួលបានមាន ចំនួន $(a-1)(b-1)/2$ ។ ដូច្នេះ $(a-1)(b-1)=2(35)=70=5(14)=7(10)$ ។ លក្ខខណ្ឌ $a>b$ និង $(a,b)=1$ នាំអោយយើងទាញបាន២ករណី $a=71,b=2$ និង $a=11,b=8$ ។ ដោយ $58=0.71+2.29$ ដូច្នេះករណីទី១មិនត្រឹមត្រូវ។ បន្ទាត់ $11x+8y=58$ កាត់តាមចំនុច $(6,-1)$ និង $(-2,10)$ ។ បន្ទាត់នេះមិនកាត់តាមចំនុចគត់ (x,y) ណាមួយនៅក្នុងកាដ្រង់ទី១ទេ។ ដូច្នេះមិនមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការនេះទេ។ ដូច្នេះចំលើយមានតែមួយគត់គឺ $a=11,b=8$ ។

324. (អាមេរិច ១៩៩៤) គេមានអិដ្ឋចំនួន៩៤ដុំ។ មួយដុំៗមានរង្វាស់ $4\times10\times19$ គេយកមកតំរៀបពីលើគ្នាជាបង្គោលមួយមានកំពស់៩៤ដុំអិដ្ឋ។ អិដ្ឋនិមួយៗ អាចតំរៀបដោយយកជ្រុង៤ រឺ១០ រឺ១៩ ស្របនឹងកំពស់របស់បង្គោល ។ តើ មានកំពស់ បង្គោល សរុបប៉ុន្មានប្រភេទដែលគេអាចធ្វើបានដោយប្រើអិដ្ឋ ទាំង៩៤ដុំនេះ?។

ចំលើយ

តាងx,y,z ជាចំនួនដុំអិដ្ឋដែលតំរៀបជាកំពស់៤,១០ និង១៩រៀងគ្នា។ យើងចង់ដឹងថា តើផលបូក $4x+10y+19z$ មានប៉ុន្មានប្រភេទខុសគ្នា ដោយអោយលក្ខខណ្ឌ $x\geq0, y\geq0, z\geq0, x+y+z=94$ ។

យើងមាន $4x+10y+19z\leq19.94=1786$ ។ ដោយយក $x=94-y-z$ យើងរាប់ចំនួនចំលើយមិនអវិជ្ជមានរបស់វិសមភាព $376+3(2y+5z)\leq1786, y+z\leq94$

$\Rightarrow \quad 2y+5z\leq470, y+z\leq94$

តាមទ្រឹស្តីបទ ៣២២ គ្រប់ចំនួនគត់$n\geq(2-1)(5-1)=4$ អាចសរសេរជារាង $n=2y+5z$ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទ៣២១ ចំនួននៃ n ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $n=2y+5z$ បាន មានចំនួន $(2-1)(5-1)/2=2$ ។ យើងមានករណី $n=1$ និង $n=3$ ដែលមិនអាចសរសេរជារាង$n=2y+5z$ ។ ដូច្នេះ ក្នុងចំណោម៤៧១ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ដែល $n\leq470$ យើងឃើញថា មាន៤៦៩ចំនួនគត់ដែលអាចសរសេរជារាង $n=2y+5z$ បាន។

យក $z=94-x-y$ យើងទាញបាន $470-n=470-2y-5z$ $=470-2y-5(94-x-y) = 5x+3y$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ ៣២១ បណ្តា

$m = 470 - n$ ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $m = 3x + 5z$ បាន មានចំនួន $(3-1)(5-1)/2 = 4$ ករណី ។ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទ ៣២២ បណ្តា m ទាំងនោះត្រូវតែ $\le 3.5 - 3 - 5 = 7$ ដែលក្នុងនោះមាន $m = 1, 2, 4, 7$ ដូច្នេះត្រូវនឹង $n = 463, 466, 468, 469$ ។ ដូច្នេះគ្រប់ចំនួនគត់n , $0 \le n \le 470$ លើកលែងតែករណី $n = 1, 3, 463, 466, 468$ និង469 ចេញ អាចសរសេរជារាងខាងលើបាន ដូច្នេះចំនួនផលបូកខុសៗគ្នាមានចំនួន $471 - 6 = 465$ ។

325. គេអោយចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។ ចូរបង្ហាញថា មានយ៉ាងហោចណាស់ $c^2/2ab$ គូចំនួនគត់ (x, y) ដែល

$$x \ge 0, y \ge 0, ax + by \le c$$

326. (អាមេរិច ១៩៩៥) ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានធំបំផុត ដែលមិនមែនជាផលបូកនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានពហុគុណនៃ៤២ និង ចំនួនគត់ពហុគុណវិជ្ជមានមួយទៀត។

327. គេអោយ $a > 0, b > 0, (a, b) = 1$។ ចូរបង្ហាញថា ចំនួនចំលើយមិនអវិជ្ជមានរបស់សមីការ $ax + by = n$ ស្មើនឹង

$$\left[\frac{n}{ab}\right] \text{ រឺក៏ } \left[\frac{n}{ab}\right] + 1$$

(ណែនាំ៖ $[s] - [t] = [s - t]$ រឺក៏ $= [s - t] + 1$)

328. គេអោយ $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$។ តាង $S(n)$ ជាចំនួនចំលើយមិនអវិជ្ជមានរបស់សមីការ

$$ax + by = n$$

ចូរគណនា

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n}$$

329. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៨៣) តាង a,b,c ជាចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា២។ ចូបង្ហាញថា $2abc-ab-bc-ca$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតដែលមិនអាចសរសេរជារាងខាងក្រោមបាន

$bcx+acy+abz, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

330. ចូរគណនា x ដែល $x\equiv 3\pmod 5$ និង $x\equiv 7\pmod{11}$

ចំលើយ

ដោយ $x=3+5a$ ដូច្នេះ $11x=33+55a$ ។ ដោយ $x=7+11b$ ដូច្នេះ $5x=35+55b$ ។ ដូច្នេះ $x=11x-10x=33-70+55a-110b$ មានន័យថា $x\equiv -37\equiv 18\pmod{55}$ ។ គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានថា $x=18+55t, t\in\mathbb{Z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការសមមូលដែលអោយ។

331. ចូរគណនាចំនួនគត់ n មួយ ដែល ពេលចែកនឹង 4 សល់សំនល់ ២, ពេលចែកនឹង៥ សល់សំនល់១ ហើយ ពេលចែកនឹង៧ សល់សំនល់១។

ចំលើយ

យើងចង់បាន n ដែល

$$n\equiv 2\pmod 4$$

$$n\equiv 1\pmod 5$$

$n \equiv 1 \pmod 7$

$\Rightarrow$

$35n \equiv 70 \pmod{140}$

$28n \equiv 28 \pmod{140}$

$20n \equiv 20 \pmod{140}$

យើងមាន

$n = 21n - 20n = 3(35n - 28n) - 20n$

ដូច្នេះ $n \equiv 3(70 - 28) - 20 \equiv 106 \pmod{140}$

$\Rightarrow$ $n \equiv 106 \pmod{140}$

332.ទ្រឹស្តីបទចិន

គេអោយ $m_1, m_2, ..., m_k$ ជាចំនួនវិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នាពីរៗ ហើយនិមួយៗ ធំជាង១។

តាង $a_1, a_2, ..., a_k$ ជាចំនួនគត់ណាមួយ។ នោះប្រព័ន្ធសមីការសមមូល

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

មានចំលើយ ហើយតែមួយគត់តាម $m_1 m_2 ... m_k$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $P_j = m_1 m_2 ... m_k / m_j, 1 \le j \le k$ ។ តាង Q_j ដែល $P_j Q_j \equiv 1 \left(\bmod m_j\right)$ ។ យើងដឹងថា មានQ_j ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងលើ ព្រោះគ្រប់m_i បឋមរវាងគ្នា២ៗ។ យើងបង្កើតចំនួន

$$x = a_1 P_1 Q_1 + a_2 P_2 Q_2 + ... + a_k P_k Q_k$$

យើងឃើញថាចំនួនខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ។

ដើម្បីបង្ហាញថា ចំលើយមានតែមួយ យើងសន្មតថា មានy ផ្សេងទៀត ដែល $y \equiv a_j \left(\bmod m_j\right)$ ចំពោះគ្រប់ $j \in \{1, 2, .., k\}$ ។ ដូច្នេះ $y - x \equiv 0 \left(\bmod m_j\right)$ ចំពោះគ្រប់ j ។ យើងទាញបានថា m_j និមួយៗចែកដាច់$(y - x)$ ។ ដោយm_j បឋមរវាងគ្នា២ៗ នោះ យើងទាញបាន $m_1 m_2 ... m_k \mid (y - x)$ ។រឺនិយាយម្យ៉ាងទៀត $y \equiv x \left(\bmod m_1 m_2 ... m_k\right)$ ។

333. តើគេអាចរកបាន១លានចំនួនគត់តរៀងគ្នាដែលចំនួនទាំងអស់នោះសុទ្ធតែចែកដាច់នឹងចំនួនការេ រឺទេ?។

ចំលើយ

តាង $p_1, p_2, ..., p_{1,000,000}$ ជា១លានចំនួនគត់បឋមគ្នា២ៗផ្សេងគ្នា។ តាមទ្រឹស្តីបទចិន ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមានចំលើយ

$$x \equiv -1 \left(\bmod p_1^2\right)$$

$$x \equiv -2 \left(\bmod p_2^2\right)$$

$$\vdots$$

$$x \equiv -1,000,000 \left(\bmod p_{1,000,000}^2\right)$$

បណ្តាចំនួន $x+1, x+2, \ldots, (x+1000000)$ ជា១លានចំនួនគត់តរៀងគ្នា ដែលនិមួយៗ
ចែកដាច់នឹងការេនៃចំនួនបឋម។

334. (អាមេរិច ១៩៨៦)

១) តើមាន១៤ចំនួនគត់វិជ្ជមានតរៀងគ្នា ដែល និមួយៗចែកដាច់នឹងចំនួន
បឋម p មួយរឺច្រើនជាងនេះ ដែល $2 \le p \le 11$ រឺទេ?។

២) តើមាន២១ចំនួនគត់វិជ្ជមានតរៀងគ្នា ដែល និមួយៗចែកដាច់នឹងចំនួន
បឋម p មួយរឺច្រើនជាងនេះ ដែល $2 \le p \le 13$ រឺទេ?។

335. ផ្នែកគត់ និង ផ្នែកទសភាគ

ផ្នែកគត់នៃ x តាងដោយ $[x]$។

ឧទាហរណ៍ $[3.78]=3$។ យើងមាន $x-1<[x]\le x$ រឺក៏ $[x]\le x<[x]+1$។

គេប្រើសញ្ញាសំគាល់ $\{x\}=x-[x]$ តាងអោយផ្នែកទសភាគ។

ដូច្នេះ $x=[x]+\{x\},0\le\{x\}<1$

336. ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយ $\alpha,\beta\in\mathbb{R},a\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$ ។ នោះ

១) $[\alpha+a]=[\alpha]+a$

២) $\left[\dfrac{\alpha}{n}\right]=\left[\dfrac{[\alpha]}{n}\right]$

៣) $[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1$

សំរាយបញ្ជាក់

១) តាង $m=[\alpha+a]$ ។ ដូច្នេះ $m\le\alpha+a<m+1$ ។ $\Rightarrow$ $m-a\le\alpha<m-a+1$

មានន័យថា $m-a=[\alpha]$ ។

២) $\dfrac{\alpha}{n}=\left[\dfrac{\alpha}{n}\right]+\theta,0\le\theta<1$ $\Rightarrow$ $\alpha=n\left[\dfrac{\alpha}{n}\right]+n\theta$

ដោយ $n\left[\dfrac{\alpha}{n}\right]$ ជាចំនួនគត់ នោះតាម(១) យើងទាញបាន

$$[\alpha]=\left[n\left[\frac{\alpha}{n}\right]+n\theta\right]=n\left[\frac{\alpha}{n}\right]+[n\theta]$$

$$\Rightarrow\quad \frac{[\alpha]}{n}=\left[\frac{\alpha}{n}\right]+\frac{[n\theta]}{n}$$

ដោយ $0\le[n\theta]\le n\theta<n$ ដូច្នេះ $0\le\frac{[n\theta]}{n}<1$ ។

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{\alpha}{n}\right]=\left[\frac{[\alpha]}{n}\right]$$

៣) តាមវិសមភាព $\alpha-1<[\alpha]\le\alpha, \beta-1<[\beta]\le\beta$ យើងទាញបាន

$$\alpha+\beta-2<[\alpha]+[\beta]\le\alpha+\beta$$

ដោយ $[\alpha]+[\beta]$ ជាចំនួនគត់តូចជាងរឺស្មើ $\alpha+\beta$ នោះវាត្រូវតែតូចជាងរឺស្មើផ្នែកគត់របស់ $\alpha+\beta$ ។ មានន័យថា $[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]$

$$\alpha+\beta-2<[\alpha]+[\beta]$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta<[\alpha]+[\beta]+2$$

$$\Rightarrow \quad [\alpha+\beta]<[\alpha]+[\beta]+2$$

$$\Rightarrow \quad [\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1$$

337. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$[x]+[x+y]+[y]\le[2x]+[2y]$$

ចំលើយ

យើងមាន $x=[x]+\{x\}$ និង $y=[y]+\{y\}$ ។ ដូច្នេះ

$$[2x]+[2y]=2[x]+\left[2\{x\}\right]+2[y]+\left[2\{y\}\right]$$

និង $$[x+y]=[x]+[y]+\left[\{x\}+\{y\}\right]$$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right]\ge\left[\{x\}+\{y\}\right]$$

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $\{x\}\ge\{y\}$ ។ យើងដឹងថា $\{x\}$ ជាចំនួនមិនតូចជាងសូន្យ។ យើងមាន

$$\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right]\geq\left[2\{x\}\right]\geq\left[\{x\}+\{y\}\right]$$ ពិត។

338. **(អាមេរិច ១៩៨៧)ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ធំបំផុត ដើម្បីអោយ គេមាន ចំនួនគត់ k មួយគត់ដែល**

$$\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$$

ចំលើយ

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{6}{7}n<k<\frac{7}{8}n$$

ដើម្បីអោយមាន k តែមួយគត់ទាល់តែ $\frac{7}{8}n-\frac{6}{7}n\leq 2 \Rightarrow n=112$ ។ ចំពោះ $n=112$ យើងទាញបាន $96<k<98$ ដូច្នេះ មានតែ $k=97$ មួយគត់។

339. **(អាមេរិច ១៩៩៧) សន្មតថា a ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $\left\{a^{-1}\right\}=\left\{a^2\right\}$ និង $2<a^2<3$ ។ ចូរគណនា $a^{12}-144a^{-1}$ ។**

ចំលើយ

ដោយ $a>1$ នោះ $0<a^{-1}<1 \Rightarrow \left\{a^{-1}\right\}=a^{-1}$ ។ ដោយ $2<a^2<3$ នោះ $\left[a^2\right]=2$ ។ ដូច្នេះ $\left\{a^2\right\}=a^2-\left[a^2\right]=a^2-2$ ។ ដូច្នេះ $\left\{a^{-1}\right\}=\left\{a^2\right\} \Rightarrow$ $a^{-1}=a^2-2 \Rightarrow a^3-2a-1=0$ ។ ដូច្នេះ

$$(a+1)\left(a^2-a-1\right)=0$$

ដែល មានរឺសវិជ្ជមានតែមួយគត់គឺ $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះតំលៃ a នេះ យើងមាន $a^2=a+1$ និង $a^3=2a+1$ យើងទាញបាន

$$a^6=8a+5,\ a^{12}=144a+89 \text{ និង } a^{13}=233a+144$$

$$\Rightarrow \quad a^{12}-144a^{-1}=\frac{a^{13}-144}{a}=233$$

340. (អាមេរិច ២០០៣) គណនាចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $\dfrac{1}{n}$ នៅជិត $\left\{\sqrt{123456789}\right\}$ បំផុត។

ចំលើយ

យើងមាន

$$11111.11^2=123456765.4321<123456789$$

$$<123456789.87654321=11111.1111^2$$

ដូច្នេះ $\left[\sqrt{123456789}\right]=11111 \Rightarrow \dfrac{1}{10}<0.11<\left\{\sqrt{123456789}\right\}<0.1111<\dfrac{1}{9}$ ។

កណ្តាលនៃ $1/10$ និង $1/9$ គឺ $\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{9}\right)/2=0.105<0.11$ ។ ដូច្នេះ $\dfrac{1}{9}$ នៅជិត $\left\{\sqrt{123456789}\right\}$ ជាង។ ដូច្នេះ $n=9$ ។

341. គណនាពហុធាមិនសូន្យ $P(x,y)$ មួយ ដែល $P\left([2t],[3t]\right)=0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត t ។

ចំលើយ

តាង

$f(t) = 3[2t] - 2[3t]$

$f(t+1) = 3[2t+2] - 2[3t+3] = 3[2t] + 6 - (2[3t] + 6) = f(t)$

ដូច្នេះយើងនឹងគណនាតំលៃរបស់ $f(t)$ តែក្នុងករណី $t \in [0,1)$ ។

យើងមាន

$$[0,1) = [0,1/3) \cup [1/3,1/2) \cup [1/2,2/3) \cup [2/3,1)$$

បើ $t \in [0,1/3)$ នោះ $[2t] = [3t] = 0$ ដូច្នេះ $f(t) = 0$

បើ $t \in [1/3,1/2)$ នោះ $[2t] = 0; [3t] = 1$ ដូច្នេះ $f(t) = -2$

បើ $t \in [1/2,2/3)$ នោះ $[2t] = 1; [3t] = 1$ ដូច្នេះ $f(t) = 1$

បើ $t \in [2/3,1)$ នោះ $[2t] = 1; [3t] = 2$ ដូច្នេះ $f(t) = -1$

ដូច្នេះ

$$P(x,y) = (3x-2y)(3x-2y-1)(3x-2y+1)(3x-2y+2)K(x,y)$$

342. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ n ដែល $1 + \left[\sqrt{2n}\right]$ ចែកដាច់ $2n$ ។

ចំលើយ

តាង $2n = m\left(1 + \left[\sqrt{2n}\right]\right)$ ។

បើ $m \le \left[\sqrt{2n}\right] - 1$ នោះ $2n \le \left(\left[\sqrt{2n}\right] - 1\right)\left(\left[\sqrt{2n}\right] + 1\right)$

$= \left[\sqrt{2n}\right]^2 - 1 \le 2n - 1 < 2n$ មិនពិត។

បើ $m \ge \left[\sqrt{2n}\right] + 1$ នោះ $2n \ge \left(\left[\sqrt{2n}\right] + 1\right)^2 \ge 2n + 1$ មិនពិត។

ដូច្នេះ មានតែ $m = \left[\sqrt{2n}\right]$ ។ ដូច្នេះ $n = m(1+m)/2$ ដែល $m = \left[\sqrt{2n}\right]$

ច្រាសមកវិញ បើ $n = m(1+m)/2$ នោះ

$\Rightarrow \quad 2n = m(1+m)$

$\Rightarrow \quad m < \sqrt{2n} < m+1$

$\Rightarrow \quad m = \left[\sqrt{2n}\right]$

$\Rightarrow \quad 2n = \left[\sqrt{2n}\right]\left(1+\left[\sqrt{2n}\right]\right)$

$\Rightarrow \quad 2n$ ចែកដាច់នឹង $\left(1+\left[\sqrt{2n}\right]\right)$ ។

ដូច្នេះ ចំពោះ $m \in \mathbb{N}, n = \dfrac{m(m+1)}{2}$ នោះ $1+\left[\sqrt{2n}\right]$ ចែកដាច់ $2n$ ។

343. **ចូរបង្ហាញថា ចំនួនគត់ $\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]$ ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ជាចំនួនគូនិងសេសឆ្លាស់គ្នា។**

ចំលើយ

យើងមាន

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n = 2\sum_{0\le k\le n/2} 2^k \binom{n}{2k} = 2N$$

ជាចំនួនគត់គូ។

ដោយ $-1 < 1-\sqrt{2} < 0$ នោះ

ករណី n ជាចំនួនសេស នោះ

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n - 1 < \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n < \left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n = \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right] = 2N \quad \text{ជាចំនួនគត់គូ}$$

ករណី n ជាចំនួនគូ នោះ

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n = \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right] + 1$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right] = 2N-1$$ ជាចំនួនសេស។

ដូច្នេះមានន័យថា ចំពោះ $n = 1, 2, \ldots.$ នោះ $\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]$ មានតំលៃសេស, គូ, សេស, គូ,…ឆ្លាស់គ្នារហូត។

344. **ចូរបង្ហាញថា លេខ១ពាន់ខ្ទង់ដំបូងក្រោយក្បៀស របស់ $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1980}$ សុទ្ធតែជាលេខ៩ទាំងអស់។**

ចំលើយ

យើងដឹងថា $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1980} + \left(6-\sqrt{35}\right)^{1980} = 2k$ ជាចំនួនគត់គូ។

យើងមាន $0 < 6-\sqrt{35} < \dfrac{1}{10}$ (ព្រោះបើ $6-\sqrt{35} > \dfrac{1}{10}$ នោះ $3500 < 3481$)

$$\Rightarrow \qquad \left(6-\sqrt{35}\right)^{1980} < 10^{-1980}$$

$$\Rightarrow \qquad 2k-1+0.\underbrace{99....9}_{1979\text{ដង}} = 2k - \frac{1}{10^{1980}} < \left(6+\sqrt{35}\right)^{1980} < 2k$$

$\Rightarrow$ ១៩៧៩ខ្ទង់ដំបូងក្រោយក្បៀសសុទ្ធតែជាលេខ៩

345. **ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $n \geq 0$ គេមាន** $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$

ចំលើយ

យើងដឹងថា $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 0$ ។ ព្រោះ

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} \Leftrightarrow$$

$$2n+1+2\sqrt{n^2+n} < 4n+2$$

$$2\sqrt{n^2+n} < 2n+1$$

$$4\left(n^2+n\right)<4n^2+4n+1$$ ពិត

បន្ទាប់មកទៀតយើងនឹងបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ k ដែល $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<k\le\sqrt{4n+2}$ ទេ។

លើកវិសមភាពជាការេ $2n+1+2\sqrt{n^2+n}<k^2\le 4n+2$

យើងដឹងថា $4n+1<2n+1+2\sqrt{n^2+n}$ ដូច្នេះ $4n+1<k^2\le 4n+2$

ដោយសារ k ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះ $k^2=4n+2$ ។ តែយើងដឹងថា $4n+2$ មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់បានទេ ។ព្រោះ បើ $k=2m$ នោះ $k^2\equiv 0\pmod 4$ ។ តែបើ $k=2m+1$ នោះ $k^2\equiv 1\pmod 4$ ។ តែ $k^2=4n+2\equiv 2\pmod 4$ មានន័យថា k^2 មិនអាចស្មើ $4n+2$ ទេ។ ដូច្នេះ k មិនអាចជាចំនួនគត់បានទេ។

ដូច្នេះ $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ ពិត។

346. **ចូរកំនត់ចំនួនមិនការេទីn ។ឧទាហរណ៍ ២ ជាចំនួនមិនការេទី១, ៣ជាចំនួនមិនការេទី២,៥ជាចំនួនមិនការេទី៣។ល។**

ចំលើយ

តាង T_n ជាចំនួនមិនការេទីn ។ គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិm ដែល $m^2<T_n<(m+1)^2$ ។ មានចំនួនការេចំនួនm ដែលតូចជាង T_n និង ចំនួនមិនការេចំនួនn មកត្រឹមT_n ដូច្នេះយើងឃើញថា $T_n=n+m$ ។ ដូច្នេះ

$$\Rightarrow\quad m^2<n+m<(m+1)^2$$

$$\Rightarrow\quad m^2-m<n<m^2+m+1$$

ដោយ $m^2-m;n;m^2+m+1$ សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ នោះវិសមភាពខាងលើទៅជា

$$m^2-m+\frac{1}{4}<n<m^2+m+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left(m-\frac{1}{2}\right)^2 < n < \left(m+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad m < \sqrt{n}+\frac{1}{2} < m+1$$

$$\Rightarrow \quad m = \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad T_n = n + \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

347. តាង $f(n)=n+\left[\sqrt{n}\right]$។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m, ស្វ៊ីត

$$m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \ldots$$

មាន យ៉ាងហោចណាស់ចំនួនគត់ការេមួយ។

ចំលើយ

តាង $\quad m = k^2 + j, 0 \le j \le 2k$

យើងចែក សំនុំនៃm ជា២សំនុំរង ដែលក្នុងនោះ $A=\left\{m=k^2+j, 0\le j\le k\right\}$ ជាសំនុំនៃ m ដែលធំជាងចំនួនការេចំនួន j ដែល $0\le j\le k$ ។ $B=\left\{k^2+j, k<j\le 2k\right\}$ ជាសំនុំនៃ m ដែលធំជាងចំនួនការេចំនួន j ដែល $k<j\le 2k$ ។

យើងសង្កេតឃើញថា $k^2 \le m < (k+1)^2 = k^2+2k+1$ ។ បើសិនជា $j=0$ មានន័យថា សំនើខាងលើពិត។

សន្មតថា $m\in B$ ។ ដោយ $\left[\sqrt{m}\right]=k$ នោះ

$$f(m) = k^2 + j + k = (k+1)^2 + j - k - 1$$

ដែល $0 \le j-k-1 \le k-1 < k$ ។ ដូច្នេះ $f(m)$ មិនមែនជាធាតុរបស់ B ទេ។ ដូច្នេះ មានន័យថា $f(m)$ អាចជាចំនួនការេ រឺក៏ $f(m)\in A$ ។ ដូច្នេះ យើងពិនិត្យតែករណី

$m \in A$ គឺគ្រប់គ្រាន់ហើយ។ ករណីនេះ

$k^2 < m+k = k^2+k+j \le k^2+k+k < k^2+2k+1$

$\Rightarrow k^2 < m+k < (k+1)^2 \Rightarrow\ k < \sqrt{m+k} < k+1 \Rightarrow\ \left[\sqrt{m+k}\right] = k$ ។ ដូច្នេះ

$$f\left(f\left(m\right)\right) = f\left(m+k\right) = m+2k = \left(k+1\right)^2 + j - 1$$

មានន័យថា $f\left(f\left(m\right)\right)$ អាចជាចំនួនការេរឺក៏បើមិនអញ្ចឹងទេក៏ $f\left(f\left(m\right)\right) \in A$ ដោយលើសចំនួនការេចំនួន $j-1$ ដែលតិចជាងm ដែលលើសចំនួនការេចំនួន j ។ ដូច្នេះ ជំហានបន្តបន្ទាប់មកទៀត តំលៃដែលលើសនោះនឹងថយចុះកាន់តែតូចទៅៗ រហូតដល់ពេលមួយតំលៃស្មើសូន្យ។ នៅពេលនោះ យើងនឹងទាញបានចំនួនការេ។

348. ដោះស្រាយសមីការ

$$\left[x^2 - x - 2\right] = [x],\ x \in \mathbb{R}$$

ចំលើយ

$[a] = [b]$ លុះត្រាតែ $\exists k \in \mathbb{Z}$ ដែល $a, b \in [k, k+1)$ និងច្រាសមកវិញ ហើយករណីនេះកើតមានតែចំពោះ $|a-b| < 1$ ប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ សមីការដែលអោយមានរឺស លុះត្រាតែ $\left|x^2 - 2x - 2\right| < 1$ ។ វិសមភាពនេះមានចំលើយ

$$x \in \left(-1, \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right] \cup \left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right)\right)$$

349. ដោះស្រាយសមីការ

$$4x^2 - 40[x] + 51 = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

ចំលើយ

យើងមាន $(2x-3)(2x-17)=4x^2-40x+51\le 4x^2-40[x]+51=0$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\le x\le\frac{17}{2}$ និង $1\le[x]\le 8$ ។ ដូច្នេះ

$$x=\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$$

ដូច្នេះ ត្រូវតែ $[x]=\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$

សាក $[x]\in\{1,2,3,..,8\}$ ម្តងមួយៗ យើងឃើញថា មានតែ $[x]=2,6,7,8$ ប៉ុណ្ណោះ។

ដូច្នេះ ចំលើយរបស់ x គឺ $\frac{\sqrt{29}}{2};\frac{\sqrt{189}}{2};\frac{\sqrt{229}}{2};\frac{\sqrt{269}}{2}$ ។ ច្រាសមកវិញ យើងយក ចំលើយទាំងនេះ ទៅផ្ទៀងផ្ទាត់សារឡើងវិញក្នុងសមីការ យើងនឹងឃើញថា វីសទាំងនេះជា ចំលើយពិតប្រាកដ។

350. (អូស្ត្រាលី ១៩៩៩) ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$x+[y]+\{z\}=200$$
$$\{x\}+y+[z]=190.1$$
$$[x]+\{y\}+z=178.8$$

ចំលើយ

យើងមាន $x=[x]+\{x\}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ បូកអង្គនិងអង្គនៃសមីការ

$$2x+2y+2z=568.9 \text{ រឺ } x+y+z=284.45$$

ជំនួសសមីការក្រោយនេះចូលក្នុងសមីការទាំង៣ដែលអោយ

$$\{y\}+[z]=84.45$$

$$[x]+\{z\}=94.35$$

$$\{x\}+[y]=105.65$$

$\Rightarrow \quad 84=[84.45]=[\{y\}+[z]]=[z]$ ដូច្នេះ $[z]=84$ និង $\{y\}=0.45$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន $[y]=105 \Rightarrow y=105.45$ ។ ដូចគ្នា $x=94.65$ និង $z=84.35$ ។

351.ទ្រឹស្តីបទ

បើ a,b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា ចូរបង្ហាញថា

$$\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{2b}{a}\right]+\ldots\left[\frac{(a-1)b}{a}\right]=\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{2a}{b}\right]+\ldots.+\left[\frac{(b-1)a}{b}\right]$$
$$=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ពិនិត្យចតុកោណកែងមួយ ដែលមានកំពូលត្រង់ $(0,0),(0,b),(a,0),(a,b)$ ។ ចតុកោណកែងនេះ មាន $(a-1)(b-1)$ ចំនុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់។ ចតុកោណកែងនេះចែកជា២ចំនែកស្មើគ្នាដោយបន្ទាត់ $y=\frac{xb}{a}$ ។ យើងនិយាយថា គ្មានចំនុចណាមួយដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នេះ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ទេ លើកលែងតែចំនុចចុងទាំង២។ បើសិនជាមានចំនុចមានកូអរដោនេគត់ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នេះ ត្រង់ (m,n) ដែល $0<m<a, 0<n<b$ នោះ $\frac{n}{m}=\frac{b}{a}$ ។ នោះ មានន័យថា $\frac{b}{a}$ អាចបង្រួមទៅជា $\frac{n}{m}$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែល a,b បឋមរវាងគ្នា ។

ចំនុច $L_k=\left(k,\frac{kb}{a}\right),1\le k\le a-1$ ជាបណ្តាចំនុចដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នេះ។ $\left[\frac{kb}{a}\right]$ ស្មើនឹងចំនួនចំនុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ឈរ ចេញពី $(k,0)$ ទៅ $\left(k,\frac{kb}{a}\right)$។ដូច្នេះ $\sum_{k=1}^{a-1}\left[\frac{kb}{a}\right]$ ជាចំនួនចំនុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលស្ថិតនៅក្នុងពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងក្រោមរបស់ចតុកោណកែង។ ដូចគ្នាដែរ $\sum_{k=1}^{a-1}\left[\frac{ka}{b}\right]$ ជាចំនួនចំនុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលស្ថិតនៅក្នុងពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងលើរបស់ចតុកោណកែង។ ដោយជាសរុបមាន $(a-1)(b-1)$ ចំនុចមានកូអរដោនេគត់ ហើយចែកស្មើគ្នាផ្នែកខាងលើនិងខាងក្រោមចតុកោណកែង។ ដូច្នេះសំនើខាងលើពិត។

352. គណនាផ្នែកគត់របស់

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

ចំលើយ

អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ជាអនុគមន៍ចុះ។ ដូច្នេះ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន k

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{k=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

យើងមាន $\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}=1998$

$$\Rightarrow \qquad 1998+\frac{1}{10^3}<\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}<1999$$

ដូច្នេះ $\left[\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]=1998$

353. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៦៨)–$[x]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ x ។ ចូរគណនា

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots$$

ចំលើយ

យើងឃើញថា នៅក្នុងផលបូកខាងលើ ចំនួនតួដែលខុសពី0 មានចំនួនកំនត់ គឺថា $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$ ស្មើសូន្យពេលដែល $2^{k+1}>n+2^k \Rightarrow 2^k>n$ ។

សំនើះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$ ។

សំរាយបញ្ជាក់៖ បើ $n\le x<n+1/2$ នោះ $[x]=n=[x+1/2]$ និង $[2x]=2n$ ។ បើ $n+1/2\le x<n+1$ នោះ $[x]=n; [x+1/2]=n+1$ និង $[2x]=n+1$ ។

ដូច្នេះ

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$$

ដូច្នេះផលបូកខាងលើទៅជា

$$\left([n]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]\right)+\ldots.$$

$=[n]=n$ បើ n ជាចំនួនគត់។

354. **ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពហ៊ែរមីតះ បើ x ជាចំនួនពិត និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ**

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

ចំលើយ

បើ x ជាចំនួនគត់នោះ យើងឃើញថា សមភាពពិត។ យើងសន្មតថា x មិនមែនជាចំនួនគត់ មានន័យថា $0<\{x\}<1$ ។ យក $i=\left[n-n\{x\}\right]$ ដូច្នេះ

$$1\le i\le n-1;\quad \{x\}+\frac{i-1}{n}<1 \text{ និង } \quad \{x\}+\frac{i}{n}\ge 1 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n-i}{n}\le\{x\}<\frac{n-i+1}{n}\Rightarrow (n-i)\le n\{x\}<n-i+1$$

$$\Rightarrow n[x]+n-i\le n[x]+n\{x\}=nx<n[x]+n-i+1$$

$$\Rightarrow [nx]=n[x]+n-i \qquad (**)$$

តាម (*) យើងទាញបាន

$$[x]=[x];\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[[x]+\{x\}+\frac{1}{n}\right]=[x];\ \ldots.;\ \left[x+\frac{i-1}{n}\right]=[x]$$

និង $$\left[x+\frac{i}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[x]+1$$

ដូច្នេះ $$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=i[x]+(n-i)\left([x]+1\right)$$

$=n[x]+n-i=[nx]$ តាម (**)

355. (អាមេរិច ១៩៨៥) តើក្នុងចំនោម1000ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង មានប៉ុន្មាន ដែលអាចសរសេរជារាង ខាងក្រោមបាន?

$$[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$$

ចំលើយ

តាង $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ ។ យើងឃើញថា បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $f(x+n)=f(x)+20n$ ។ ជាពិសេស នេះមានន័យថា បើ ចំនួនគត់ k មួយអាចសរសេរជារាង $f(x_0)$ បានចំពោះចំនួនគត់ x_0 នោះចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$ គេអាចសរសេរចំនួន $k+20n$ បានដូចគ្នា មានន័យថា $k+20n=f(x_0)+20n=f(x_0+n)$ ។ ដោយហេតុនេះហើយ ជាដំបូងយើងគ្រាន់តែកំនត់ថាតើក្នុងចំនោម២០ចំនួនគត់ដំបូងមួយណា ដែលអាចជាតំលៃរបស់ $f(x)$ ចំពោះ $x\in(0,1]$ ។

យើងសង្កេតឃើញថា ពេល x កើន តំលៃរបស់ $f(x)$ ប្តូរជាតំលៃថ្មីតែពេល ណា ដែល $2x,4x,6x$ រឺ $8x$ មានតំលៃគត់ប៉ុណ្ណោះ ហើយពេលនោះ តំលៃរបស់ $f(x)$ កើនធំជាងមុន។ ពេល x ប្រែប្រួលចន្លោះ $(0,1]$ កំនើន $f(x)$ បែបនេះ កើតមានតែពេលណា ដែល x មានរាង m/n ដែល $1\le m\le n$ និង $n=2,4,6$ រឺ 8 ។ ប្រភាគបែបនេះមានចំនួន១២ យ៉ាងគឺ

$$\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8} \text{ និង } 1$$

ត្រូវនឹង $f(x)$ មានតំលៃ

$$1,2,4,5,6,13,\ldots.,20$$

ដូច្នេះក្នុងចំនោម ២០ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងមានតែចំនួន១២ប៉ុណ្ណោះដែលអាចសរសេរតាមរាងចង់បាន។ ដោយ $1000=50.20$ ដូច្នេះ មានចំនួន $50.12=600$ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលអាចសរសេរជារាងចង់បាន។

356. (អាមេរិច ១៩៩១)សន្មតថា r ជាចំនួនពិត ដែល

$$\left[r+\frac{19}{100}\right]+\left[r+\frac{20}{100}\right]+\left[r+\frac{21}{100}\right]+\ldots\left[r+\frac{91}{100}\right]=546$$

ចូរគណនា $[100r]$ ។

ចំលើយ

ផលបូកដែលអោយមាន $91-19+1=73$ តួ ដែលតួនិមួយៗ ស្មើនឹង $[r]$ រឺក៏ $[r]+1$ ។

តែ $73.7<546<73.8$ ដូច្នេះមានន័យថា $[r]=7$ ។

តាង k ជាចំនួនតួដែលស្មើ $[r]$ ដូច្នេះចំនួនតួដែលស្មើ $[r]+1$ មាន $73-k$ ។ ដូច្នេះ

$$k[r]+(73-k)([r]+1)=546$$

$$\Rightarrow k[r]+73[r]+73-k[r]-k=546$$

$$\Rightarrow \quad 73[r]-473=k$$

$$\Rightarrow \quad k\equiv -473(\bmod 73)$$

$$\Rightarrow \quad k\equiv 38(\bmod 73)$$

ដោយ $k\le 73$ ដូច្នេះ $k=38$ $\quad\Rightarrow [r]=7$ ។ ដូច្នេះ 38 តួដំបូងស្មើ 7 និង $73-38=35$ តួបន្ទាប់ស្មើ 8 ។ តួទី 38 គឺ $\left[r+\frac{56}{100}\right]=7$ និង តួទី39 គឺ $\left[r+\frac{57}{100}\right]=8$ ។ យើងទាញបាន

$$r+\frac{56}{100}-1<7\le r+\frac{56}{100} \quad \text{និង} \quad r+\frac{57}{100}-1<8\le r+\frac{57}{100}$$

$$\Rightarrow \quad 7.43\le r<7.44 \quad\Rightarrow\quad 743\le 100r<744 \quad\Rightarrow [100r]=743$$

357. ចូរកំនត់ចំនួនតួដែលមានតំលៃខុសគ្នាក្នុងស្វ៊ីតខាងក្រោម

$$\left[\frac{1^2}{2005}\right],\left[\frac{2^2}{2005}\right],\ldots,\left[\frac{2005^2}{2005}\right]$$

ចំលើយ

ចំពោះ $1\le i\le 2005$ តាង

$$a_i=\left[\frac{i^2}{2005}\right]$$

ដោយ $44^2=1936<2005<2025=45^2$, នោះ $a_1=a_2=\ldots=a_{44}=0$ ។

ចំពោះចំនួនគត់ m ដែល $m\ge 1002$ ដោយ

$$\frac{(m+1)^2}{2005}-\frac{m^2}{2005}=\frac{2m+1}{2005}\ge 1$$

នោះ $a_m<a_{m+1}$ ។ ដូច្នេះ $a_{1002},a_{1003},\ldots,a_{2005}$ មានតំលៃខុសៗគ្នា។

ចំពោះចំនួនគត់ m ដែល $m<1002$ ដោយ

$$\frac{(m+1)^2}{2005}-\frac{m^2}{2005}=\frac{2m+1}{2005}<1$$

នោះ $a_{m+1}\le a_m+1$ ។ ដោយដឹងថា ស្វ៊ីតនេះមិនមែនជាស្វ៊ីតថយ នោះមានន័យថា $a_m\le a_{m+1}\le a_m+1$ ។ដូច្នេះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ដែលមានតំលៃតូចជាង a_{1001} ជាតួនៃស្វ៊ីតនេះ។

យើងមាន $a_{1001}=499$ និង $a_{1002}=500$ ។ ដូច្នេះចំនួនតួដែលមានតំលៃខុសគ្នាគឺ $500+1004=1504$ (តំលៃទាំងនោះគឺ $0,1,\ldots,499,a_{1002},a_{1003},\ldots,a_{2005}$)

358. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $n > 0$ គេមាន $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right]$

359. ចូរបង្ហាញថា $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right]$

360. បើ $x, y \in \mathbb{R}$ តើពេលណា $[x][y] \le [xy]$ ពិត?។

361. បើ $n > 1$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $\alpha \ge 1$ ជាចំនួនពិត ចូរបង្ហាញថា

$[\alpha] > \left[\frac{\alpha}{n}\right]$

362. បើ a,b,n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ចូរបង្ហាញថា

$\left[\frac{ab}{n}\right] \ge a\left[\frac{b}{n}\right]$

363. តាង α ជាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញថា $[\alpha]+[-\alpha]=-1$ រឺ 0 និង បង្ហាញថា $[\alpha]-2[\alpha/2]=0$ រឺ 1។

364. ចូរបង្ហាញថា $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$ ជាចំនួនគត់សេស។

365. ចូរបង្ហាញថា តួទី n របស់ស៊ីត

$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,....$

ស្មើនឹង $\left[\sqrt{2n}+1/2\right]$។ ក្នុងស៊ីតនេះចំនួនគត់ n មួយមាន n ដង។

366. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m,n គេមាន

$$\left[\frac{m+n}{2}\right]+\left[\frac{n-m+1}{2}\right]=n$$

367. បើ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $[na]+[nb]=[nc]+[nd]$ ចំពោះ

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ចូរបង្ហាញថា

$$a+b=c+d$$

368. បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ចូរបង្ហាញថា

$$\left[\frac{n+2-[n/25]}{3}\right]=\left[\frac{8n+24}{25}\right]$$

369. ចូរដោះស្រាយសមីការ

$$\left[\frac{x}{1994}\right]=\left[\frac{x}{1995}\right]$$

370. តាង $[\alpha,\beta]$ ជាចន្លោះមួយ ដែលគ្មានចំនួនគត់។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់

វិជ្ជមាន n

ដែល $[n\alpha,n\beta]$ នៅតែគ្មានចំនួនគត់ និងចន្លោះនេះ មានប្រវែងយ៉ាងហោច

ណាស់ $1/6$។

371. ចូរបង្ហាញថា បើ $n\in\mathbb{N}$ នោះ

$$\min_{k\in\mathbb{N}}\left(k+[n/k]\right)=\left[\sqrt{4n+1}\right]$$

372. (គោលការណ៍នៃអ៊ីពែរបូលរបស់ឌីរីក្លេ) តាង N ជាចំនួននៃចំលើយជា

ចំនួនគត់នៃ $xy\le n, x>0,$

$y>0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$N=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=2\sum_{1\le k\le\sqrt{n}}\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\sqrt{n}\right]^2$$

373. តាង $r>0$ និង តាង T ជាចំនួននៃបណ្តាចំនុចមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ស្ថិតក្នុងដែន

$x^2+y^2\le r^2$។ ចូរបង្ហាញថា

$$T=1+4[r]+8\sum_{0<x\le r\sqrt{2}}\left[\sqrt{r^2-x^2}\right]+4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2$$

374. តាង $d=(a,b)$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{1\le n\le(b-1)}\left[\frac{an}{b}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}+\frac{d-1}{2}$$

375. (អ៊ិសិនស្ទីន) បើ $(a,b)=1$ និង a,b ជាចំនួនសេស នោះ

$$\sum_{1\le n\le(b-1)/2}\left[\frac{an}{b}\right]+\sum_{1\le n\le(a-1)/2}\left[\frac{bn}{a}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{4}$$

376. តាង $m\in\mathbb{N}$ ដែល $m>1$ និងតាង y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{x}\left[\sqrt[m]{\frac{y}{x}}\right]=[y]$$

ដែលក្នុងផលបូកនេះ x ជាសំនុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលចែកមិនដាច់នឹងស្វ័យគុណទី m នៃចំនួនគត់មួយធំជាង១។

377. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីអោយ 112 ចែកដាច់

$$4^n - \left[\left(2+\sqrt{2}\right)^n\right]$$

378. ចំនួនរាងត្រីកោណជាចំនួនដែលមានរាង $1+2+...+n, n\in\mathbb{N}$។ ចូរកំនត់រូបមន្តនៃចំនួនគ្មានរាងត្រីកោណទី n។

379. ចូរបង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋមសេស នោះ

$$\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^p\right] - 2^{p+1}$$

ចែកដាច់នឹង p។

380. ចូរបង្ហាញថា ចំនួនទី n ដែលគ្មានរាង $\left[e^k\right], k=1,2,...$ កំនត់ដោយ

$$T_n = n + \left[\ln\left(n+1+\left[\ln\left(n+1\right)\right]\right)\right]$$

381. (អូឡាំពិច្យាដលេនីនក្រាដ) តើក្នុងចំណោមស្វ៊ីតខាងក្រោម មានចំនួនគត់ចំនួនប៉ុន្មាន?

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], ..., \left[\frac{1980^2}{1980}\right]$$

382. តាង $k\geq 2$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left[\sqrt[k]{x}\right] = \left[\sqrt[k]{[x]}\right]$$

383. ១) ចូរគណនាចំនួនពិត $x \neq 0$ ដែល $x, 2x, ..., 34x$ គ្មានលេខ៧នៅពេលសរសេរក្នុងប្រព័ន្ធរាប់

គោល១០។

២) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេមានយ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំនោម $x, 2x, ..., 79x$ ដែលមានលេខ៧ នៅពេលសរសេរក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល១០។

៣) តើអ្នកអាចថាបានយ៉ាងម៉េចចំពោះចន្លោះ៣៨និង៧៩?។

384.(អាមេរិច ១៩៩៥) តាង $f(n)$ ជាចំនួនគត់ដែលនៅជិត $n^{1/4}$ ជាងគេ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ ចូរគណនា

$$\sum_{n=1}^{1995} \frac{1}{f(n)}$$

385. ចូរបង្ហាញថា $\int_0^1 (-1)^{[1994x]+[1995x]} \binom{1993}{[1994x]} \binom{1994}{[1995x]} dx = 0$

386. ចូរបង្ហាញថា

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \left(\left[\frac{2n}{k} \right] - 2\left[\frac{n}{k} \right] \right) = \ln 4 - 1$$

387. ចូរបង្ហាញថា

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^n \left\| \frac{n}{x} \right\| dx = \log_3 \frac{4}{\pi}$$

388. ទ្រឹស្តីបទឌីប៉ូលីញ៉ាក់(De Polignac)

តាង p ជាចំនួនបឋម។ ចំនួនគត់ធំបំផុត k ដែល p^k ចែកដាច់ $n!$ កំនត់ដោយ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

សំរាយបញ្ជាក់

ក្នុងចំនោមចំនួនគត់ពី១ដល់ n , ចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង p , មានចំនួន $\left[\frac{n}{p}\right]$, ចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង p^2 , មានចំនួន $\left[\frac{n}{p^2}\right]$,.....។ ដូច្នេះ $n!$ ចែកដាច់នឹង p ស្វ័យគុណ $(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...)$។ ឧទាហរណ៍៖ $10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10$ ។

ពី១ដល់១០ ចំនួនចែកដាច់នឹង៣មានចំនួន៣គឺ ៣,៦,៩។ ចំនួនចែកដាច់នឹង$3^2 = 9$ មានចំនួន១គឺ៩។ ដូច្នេះ $10!$ ចែកដាច់នឹង $3^{3+1} = 3^4$ ។

389. តើមានលេខសូន្យចំនួនប៉ុន្មាននៃខាងចុង300!

ចំលើយ

លេខសូន្យខាងចុង300! ស្មើនឹង ចំនួនដែលជាស្វ័យគុណនៃ១០ ធំបំផុតដែលចែកដាច់300! មានន័យថា 10^k ធំបំផុតដែលចែកដាច់300!។ យើងមិនអាចយករូបមន្ត ឌីប៉ូលីញ៉ាក់មកប្រើដោយផ្ទាល់បានទេ ព្រោះ១០មិនមែនជាចំនួនបឋម។ តែ $10 = 5.2$ ។ ដូច្នេះ k ធំបំផុតដែល 10^k ចែកដាច់300! ស្មើនឹង តំលៃតូចជាងគេនៃk ក្នុងចំនោម (k ធំបំផុត ដែល 2^k ចែកដាច់300!)និង(k ធំបំផុត ដែល 5^k ចែកដាច់300!)។ តាមរូបមន្ត ឌីប៉ូលីញ៉ាក់

k ធំបំផុត ដែល 2^kចែកដាច់$300!$ ស្មើនឹង $k_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{300}{2^k}\right]$

k ធំបំផុត ដែល 2^kចែកដាច់$300!$ ស្មើនឹង $k_5 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{300}{5^k}\right] < k_2$

$$k_5 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{300}{5^k}\right] = \left[\frac{300}{5}\right] + \left[\frac{300}{5^2}\right] + \left[\frac{300}{5^3}\right] + \left[\frac{300}{5^4}\right] + \dots$$

$$= 60 + 12 + 4 + 0 \qquad = 74$$

ដូច្នេះ $300!$ មានលេខសូន្យនៅខាងចុងចំនួន៧៤ខ្ទង់។

390. តើ ៧ ចែកដាច់ $\binom{1000}{500}$ រឺទេ?។

ចំលើយ

តំលៃk ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់$1000!$ ស្មើនឹង $\left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{7^2}\right] + \left[\frac{1000}{7^3}\right]$ $= 142 + 20 + 2 = 164$ ។ ដូចគ្នាដែរ តំលៃk ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់$500!$ ស្មើនឹង$71 + 10 + 1 = 82$ ។ ដោយ $\binom{1000}{500} = \frac{1000!}{(500!)^2}$ ដូច្នេះ តំលៃk ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់$\binom{1000}{500}$ ស្មើនឹង$164 - 2.82 = 0$ ដូច្នេះ 7 ចែកមិនដាច់$\binom{1000}{500}$ទេ។

391. តាង $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ដែល n_i ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots.n_k!}$$

ជាចំនួនគត់។

ចំលើយ

យើងដឹងថា បើ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ នោះ $[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1$

ដូច្នេះតាមកំនើនយើងទាញបាន

$$[a_1]+[a_2]+...+[a_l]\le[a_1+a_2+...+a_l]$$

ចំពោះចំនួនបឋម p ណាមួយ ស្វ័យគុណ m ធំបំផុតនៃ p ដែល p^m ចែកដាច់ $n!$ កំនត់ដោយ

$$\sum_{j\ge1}\left[\frac{n}{p^j}\right]=\sum_{j\ge1}\left[\frac{n_1+n_2+...+n_k}{p^j}\right]$$

ស្វ័យគុណ m ធំបំផុតនៃ p ដែល p^m ចែកដាច់ $n_1!...n_k!$ កំនត់ដោយ

$$\sum_{j\ge1}\left[\frac{n_1}{p^j}\right]+\left[\frac{n_2}{p^j}\right]+...+\left[\frac{n_k}{p^j}\right]$$

ដោយ $\left[\frac{n_1}{p^j}\right]+\left[\frac{n_2}{p^j}\right]+...+\left[\frac{n_k}{p^j}\right]\le\left[\frac{n_1+n_2+...+n_k}{p^j}\right]$

នោះ ស្វ័យគុណធំបំផុត m នៃចំនួនបឋម p ណាមួយ ដែល p^m ចែកដាច់ភាគបែងរបស់ប្រភាគ

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$$

មានតំលៃតូចជាងរឺស្មើ ស្វ័យគុណធំបំផុត m នៃចំនួនបឋម p នោះ ដែល p^m ចែកដាច់ភាគយករបស់ប្រភាគ។ មានន័យថាប្រភាគនេះជាចំនួនគត់។

392. គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>3$។ ចូរបង្ហាញថា បណ្តាផលគុណ $x_1x_2...x_k\,(k\ge1)$ ដែលកត្តា x_i របស់វា ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល

$$x_1+x_2+...+x_k\le n$$

មានពហុគុណរួមតូចបំផុតតូចជាង $n!$។

ចំលើយ

យើងនិយាយថា ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃបណ្តាផលគុណក្នុងសំនួរ $(x_1x_2...x_k)$ កំនត់ដោយ

$$\prod_{p,p\text{ prime}} p^{\left[\frac{n}{p}\right]}$$

យើងពិនិត្យផលគុណ $x_1x_2...x_k$ ណាមួយ និងចំនួនបឋម p ណាមួយ។ សន្មតថា $p^{\alpha_j} \mid x_j, p^{\alpha_j+1} \nmid x_j$ ។ យើងដឹងថា $p^{\alpha_1}+p^{\alpha_2}+...+p^{\alpha_k} \le n$ និងដោយ $p^{\alpha} \ge \alpha p$ នោះយើងមាន

$$p(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k) \le n \qquad \text{រឺក៏ } \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k \le \left[\frac{n}{p}\right]$$

ដូច្នេះមានន័យថា ស្វ័យគុណα នៃចំនួនបឋម p ណាមួយដែល $p^{\alpha} \mid x_1x_2..x_k$ ធំមិនលើសពី $\left[\frac{n}{p}\right]$ ទេ($\alpha \le \left[\frac{n}{p}\right]$)។ តែដោយយក $x_1=x_2=...=x_k=p, k=\left[\frac{n}{p}\right]$ យើងឃើញថា មានយ៉ាងហោចណាស់ផលគុណ$x_1x_2...x_k$ មួយ ដែលវិសមភាពទៅជាសមភាពមានន័យថា $\alpha=\left[\frac{n}{p}\right]$។មានន័យថាអំនអំនាងខាងលើពិត។

តាមរូបមន្តឌឺប៉ូលីញ៉ាក់ ស្វ័យគុណធំបំផុតα នៃ p ដែល p^{α} ចែកដាច់$n!$ កំនត់ដោយ

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...$$

មានន័យថា $\displaystyle\prod_{p,p\text{ prime}} p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...}=n!$ ។ ដូច្នេះ

$$\prod_{p,p\text{ prime}} p^{\left[\frac{n}{p}\right]} \le \prod_{p,p\text{ prime}} p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+...}=n!$$

393. (អាមេរិច ១៩៧៧) ចូរគណនាតំលៃធំបំផុតរបស់ n ដែល 10^nចែកដាច់ 1005!។

394. ចូរគណនាk ធំបំផុត ដែល 17^k ចែកដាច់$\left(17^n-2\right)!$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមានn មួយ។

395. ចូរគណនាk ធំបំផុត ដែល 24^k ចែកដាច់ 300!។

396. ចូរគណនាស្វ័យគុណធំបំផុតរបស់៧ ក្នុង300!។

397. (អាមេរិច ១៩៨៣)ចូរកំនត់កត្តាបឋមធំបំផុតដែលមានលេខ២ខ្ទង់របស់ចំនួនគត់

$$\binom{200}{100}$$

398. (អាមេរិច ១៩៧៥)

១) ចូរបង្ហាញថា

$$[5x]+[5y]\geq[3x+y]+[3y+x]$$

២) ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m,n។

399. ចូរបង្ហាញថា បើ $n>1,(n,6)=1$ នោះ

$$\frac{(2n-4)!}{n!(n-2)!}$$

គឺជាចំនួនគត់។

400. (អាមេរិច ១៩៩២)យើងសន្មតហៅ ចំនួនគត់វិជ្ជមានn មួយជាកន្ទុយហ្វាក់តូរ្យែល បើ គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមានm ខ្លះ ដែល $m!$ នៅក្នុងគោល១០ មានលេខសូន្យខាងចុងចំនួនn។ តើមាន ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង ១៩៩២ ចំនួនប៉ុន្មានដែលមិនមែនជាលេខកន្ទុយហ្វាក់តូរ្យែល?។

401. ចូរបង្ហាញថា បើ m និងn ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមនឹងគ្នា នោះ

$$\frac{(m+n-1)!}{m!n!}$$

គឺជាចំនួនគត់។

402. បើ p ជាតួចែកបឋមរបស់$\binom{2n}{n}$ ដោយ $p \geq \sqrt{2n}$ ចូរបង្ហាញថា ស្វ័យគុណរបស់ p នៅក្នុងកត្តាគុណរបស់ $\binom{2n}{n}$ ស្មើ១។

403. ចូរបង្ហាញថា

$$PPCM\left(\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{n}\right)=\frac{PPCM(1,2,\ldots,n+1)}{n+1}$$

404. ចូរបង្ហាញថា $\binom{m+n}{n}$ ចែកដាច់ $\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}$។

405. **តាង n ជាចំនួនគត់មួយ។ ចូរបង្ហាញថា**

$$n^2 \equiv 0 \text{ រឺ } 1 \pmod 3$$

$$n^2 \equiv 0 \text{ រឺ } \pm 1 \pmod 5$$

$$n^2 \equiv \{0,1,4\} \pmod 8$$

$$n^3 \equiv \{0,\pm 1\} \pmod 9$$

$$n^4 \equiv \{0,1\} \pmod{16}$$

406. **(រ៉ូម៉ានី ២០០៣) គេអោយចំនួនបឋម $n_1 < n_2 < \ldots < n_{31}$ ។ ចូរបង្ហាញថា បើ 30 ចែកដាច់ $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_{31}^4$ នោះក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនោះគេអាចរកបានចំនួនបឋមពាតរៀងគ្នា។**

ចំលើយ

តាង $s = n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_{31}^4$ ។ យើងថា $n_1 = 2$ ។ ព្រោះបើមិនអញ្ចឹង គ្រប់ $n_i, 1 \le i \le 31$ ជាចំនួនសេសទាំងអស់ នាំអោយ s ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ 30 មិនអាចចែកដាច់ s ទេ ដូច្នេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។

បន្ទាប់មកទៀតយើងសន្និដ្ឋានថា $n_2 = 3$ ។ ព្រោះបើ $n_2 \ne 3$ នោះ ដោយ n_i ជាចំនួនបឋម ហើយ $n_i \ne 3$ នោះ n_i ត្រូវតែមានរាង $3k \pm 1$ ដូច្នេះ $n_i^4 \equiv 1 \pmod 3$ ចំពោះគ្រប់ $1 \le i \le 31$ ។ នាំអោយ $s \equiv 31 \equiv 1 \pmod 3$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។

ជាចុងក្រោយយើងនឹងបង្ហាញថា $n_3 = 5$ ។ ពិត ព្រោះ បើមិនអញ្ចឹង $n_i^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$ ដូច្នេះ $n_i^4 \equiv 1 \pmod 5$ ចំពោះគ្រប់ $1 \le i \le 31$ ។ ដូច្នេះ $s \equiv 31 \equiv 1 \pmod 5$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។

ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា ចំនួនបឋមពកតរៀងគ្នា គឺ 2,3,5 ស្ថិតនៅក្នុងចំនោមចំនួនដែលអោយ។

407. ទ្រឹស្តីបទវីលសុន

ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p គេមាន $(p-1)! \equiv -1(\bmod p)$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងដឹងថា បើ s បឋមនឹង p នោះគេមានx ដែល $s.x \equiv 1(\bmod p)$ ។ ព្រោះបើ (s,p) នោះតាមទ្រឹស្តីបទ**ចាដេ–បេសូ** គេមានចំនួនគត់ x,y ដែល $sx+py=1$ ។ ដូច្នេះ $s.x \equiv 1(\bmod n)$ ។ តាង $x \equiv s'(\bmod p)$ ។ ដូច្នេះ $s'<p$ ។ ដោយ $s.x \equiv 1(\bmod p)$ និង $x \equiv s'(\bmod p)$ នោះ $ss' \equiv 1(\bmod p)$ ។ មានន័យថា ចំពោះ s មួយដែលបឋមនឹង p គេមាន $s'<p$ មួយដែល $ss' \equiv 1(\bmod p)$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ s_1,s_2 គេមាន s_1',s_2' ដែល $s_1s_1' \equiv 1(\bmod p)$ និង $s_2s_2' \equiv 1(\bmod p)$ ។ បើ $s_1'=s_2'=s$ នោះ $s_2(s_1s) \equiv s_2(\bmod p) \Rightarrow s_1 \equiv s_2(\bmod p)$ ។ ដោយ $s_1,s_2<p$ នោះ $s_1=s_2$ ។ ដូច្នេះចំពោះ s_1,s_2 ផ្សេងគ្នា នោះយើងមាន s_1',s_2' ផ្សេងគ្នាដែរ។

បើ $p=2$ រឺ $p=3$ នោះទ្រឹស្តីខាងលើពិត។

សន្មតថា $p>3$ ។ ពិនិត្យ $a,$ ដែល $2 \le a \le p-2$ ។ ចំពោះa និមួយៗខាងដើមនេះ យើងកំនត់$a' \le p-1$ មួយទៀតដែល $aa' \equiv 1(\bmod p)$ ។ចំពោះ a ផ្សេងគ្នាយើងមាន a' ផ្សេងគ្នាដែរ។ បើ $a=a'$ នោះ $a^2 \equiv 1(\bmod p) \Rightarrow p \mid (a^2-1)=(a-1)(a+1)$ ។ ដោយ p ជាចំនួនបឋមនោះ $a \equiv 1(\bmod p)$ រឺមិនអញ្ចឹងទេ $a \equiv -1(\bmod p)$ ។$\Rightarrow$ $a-1=p$ រឺ $a+1=p$ ។ តែមិនអាចទាំង២ព្រោះ $a-1 \le p-3 < p$ និង

$a+1 \le p-1 < p$ ។ ដូច្នេះ $a \neq a'$ ។ ដូច្នេះ ពេលគុណគ្រប់ a ទាំងអស់ដែល $2 \le a \le p-2$ បញ្ចូលគ្នា យើងផ្គុំគូដែល $aa' \equiv 1 \pmod p$ ។ ដូច្នេះផលគុណសរុបគឺស្មើ ១។ យើងសរសេរជា

$$2.3....(p-2) \equiv 1 \pmod p$$

$$\Rightarrow \quad (p-1)! \equiv 1.\left(\prod_{2 \le a \le p-2} j\right).(p-1) \equiv 1.1.(p-1) \equiv -1 \pmod p$$

408. បើ p ជាចំនួនបឋម ដែល $p \equiv 1 \pmod 4$ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv -1 \pmod p$$

ចំលើយ

នៅក្នុងកត្តាផលគុណរបស់ $(p-1)!$ យើងផ្គួប j ជាមួយនឹង $(p-j)$ ដែល $1 \le j \le (p-1)/2$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា $j(p-j) \equiv -j^2 \pmod p$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ **វីលសុន** យើងទាញបាន

$$-1 \equiv (p-1)! \equiv \prod_{1 \le j \le (p-1)/2} -j^2 \equiv (-1)^{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

ដោយ $(-1)^{(p-1)/2} = 1$ យើងទាញបានសំនើពិត។

409. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៧០)

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលធ្វើអោយសំនុំ

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

អាចជាបំបែកជា២សំនុំរង ដែលផលគុណនៃបណ្តាចំនួនទាំងអស់នៅក្នុង សំនុំមួយ ស្មើនឹង ផលគុណនៃបណ្តាចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងសំនុំមួយទៀត។

ចំលើយ

យើងនឹងបង្ហាញថា គេមិនអាចបំបែកសំនុំខាងលើជា២ដូចរៀបរាប់ទេ។ សន្មតថាគេអាច បំបែកវាជា២បាន ដោយសន្មតថា ផលគុណនៃបណ្តាចំនួននៅក្នុងសំនុំមួយ ស្មើនឹង A ហើយនិងផលគុណនៃបណ្តាចំនួននៅក្នុងសំនុំមួយ ទៀតស្មើនឹងB ។ យើងអាចមាន ២ករណី។

ករណីទី១គឺថា មានតែមួយគត់ក្នុងចំនោម

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

ដែលចែកដាច់នឹង៧ ដែលនៅក្នុងករណីនេះមានតែA រឺ B មួយប៉ុណ្ណោះដែលចែកដាច់នឹង៧។ ដូច្នេះ A មិនអាចស្មើ B ទេ។

ករណីទី២គឺ គ្រប់តួទាំងអស់សុទ្ធតែបឋមនឹង៧។ ក្នុងករណីនេះ យើងមាន

$$n(n+1)\ldots(n+6) \equiv 1.2\ldots6 \equiv A.B \equiv -1 \pmod 7)$$

តែបើ $A = B$ នោះ សមមូលខាងលើទៅជា $A^2 \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$ ។ ចំនួនការេសមមូល នឹង $1, 2, 4 \mod 7$ ដូច្នេះ $A^2 \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$ មិនអាច។

410. ទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា

(Fermat's Little Theorem)

គ្រប់ចំនួនបឋម p និងគ្រប់ចំនួនគត់ a គេមាន

$$a^p \equiv a \pmod p$$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារដោយកំនើនតាម a ។ ពេល $a=1$ យើងទាញបានថា សំនើពិត។ សន្មតថា p ចែកដាច់ a^p-a ។ យើងមាន

$$(a+1)^p-a=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k-a=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a^k+a^p-a$$

ចំពោះ $1\le k\le p-1$ យើងមាន

$$k\binom{p}{k}=k\frac{p!}{k!(p-k)!}=p\frac{(p-1)!}{(k-1)!\left(p-1-(k-1)\right)!}=p\binom{p-1}{k-1}$$

មានន័យថា $p\,|\,k\binom{p}{k}$ តែដោយ $(p,k)=1$ ដូច្នេះ $p\,|\binom{p}{k}$ ។ ចំពោះ $k=0$ ក៏យើងមាន $p\,|\binom{p}{k}$ ដែរ។

ដូច្នេះ

$$(a+1)^p-a=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a^k+a^p-a\equiv a^p-1\equiv 0\left(\text{mod }p\right)$$

ដូច្នេះ $(a+1)^p-a$ ចែកដាច់នឹង p ។ ដូច្នេះសំនើពិត។

តាមរយៈទ្រឹស្តីបទនេះយើងទាញបានថា $a\left(a^{p-1}-1\right)\equiv 0\left(\text{mod }p\right)$ ។ ដូច្នេះ បើ p ចែក a មិនដាច់ទេ នោះមានន័យថា p ចែក $a^{p-1}-1$ ដាច់។ ដូច្នេះ $a^{p-1}\equiv 1\,\text{mod }p$ ។

411. វិបាក

តាង p ជាចំនួនបឋម និង សន្មតថា p ចែក a មិនដាច់។ នោះ

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$ ។

412. តាង p ជាចំនួនបឋម។ ចូរបង្ហាញថា p ចែកដាច់ $ab^p - ba^p$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a និង b ។

ចំលើយ

យើងមាន

$ab^p - ba^p = ab\left(b^{p-1} - a^{p-1}\right)$

បើ $p \mid ab$ នោះ $p \mid ab^p - ba^p$ ។ បើ p ចែកមិនដាច់ ab ហើយដោយ p ជាចំនួនបឋម នោះ $(p,a) = (p,b) = 1$ ហើយនាំអោយ តាមទ្រឹស្តីបទ**ភែម៉ា** យើងទាញបាន

$b^{p-1} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ។ ដូច្នេះ $p \mid b^{p-1} - a^{p-1}$ នាំអោយ $p \mid ab^p - ba^p$ ។ ដូច្នេះ $p \mid ab^p - ba^p$ ចំពោះគ្រប់ p ។

413. គេអោយចំនួនបឋម $p \geq 7$ ។ ចូរបង្ហាញថា $11\ldots1$ ដែលមាន លេខ១ ចំនួន $p-1$ ដង ជាចំនួនចែកដាច់នឹង p ។

ចំលើយ

យើងមាន $\underbrace{11...1}_{(p-1)x1} = \frac{10^{p-1}-1}{9}$

ដោយ p ជាចំនួនបឋម ហើយ $(p,10)=1$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទ**ភែម៉ា** p ចែកដាច់ $10^{p-1}-1$ ។ ដោយ $(p,9)=1$ ហើយ $\frac{10^{p-1}-1}{9}$ ជាចំនួនគត់ នោះ p ចែកដាច់ $\frac{10^{p-1}-1}{9}$ ។

414. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ២០០៤)

គេអោយស្វ៊ីត $a_1, a_2, ...$ កំនត់ដោយ

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលបឋមនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីត។

ចំលើយ

យើងមាន $p=2$ និង $p=3$ ចែកដាច់នឹង $a_2 = 2^2+3^2+6^2-1=48$ ។

សន្មតថា $p \geq 5$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**ភែម៉ា** យើងមាន $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$ ។

ដូច្នេះ

$$3.2^{p-1} + 2.3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 3+2+1 \equiv 6(\bmod p)$$

$$\Rightarrow \quad 6\left(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\right) \equiv 0(\bmod p)$$

មានន័យថា $6a_{p-2}$ ចែកដាច់នឹង p ។ ដោយ p បឋមនឹង 6 នោះ a_{p-2} ចែកដាច់នឹង p ។

ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនបឋមទាំងអស់ចែកដាច់យ៉ាងតិចតួមួយរបស់ស៊ីតនេះ។ មានន័យថា មិនអាចមានចំនួនណាមួយក្រៅពី១ ដែលបឋមនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស៊ីតនេះទេ។

415. **តាង** $a_1 = 4, a_n = 4^{a_{n-1}}, n > 1$ **។ ចូរគណនាសំនល់នៃ** a_{100} **ចែកនឹង៧។**

ចំលើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ**ភែម៉ា** យើងមាន $4^6 \equiv 1 \pmod 7$ ។ យើងមាន $4^n \equiv 4 \pmod 6$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មានន័យថា $4^n = 4 + 6t$ ចំពោះចំនួនគត់ t ណាមួយ។ ដូច្នេះ

$$a_{100} = 4^{a_{99}} = 4^{4+6t} = 4^4.\left(4^6\right)^t \equiv 4 \pmod 7$$

a_{100} **ចែកនឹង៧ សល់ ៤។**

416. **ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់** $m, n \in \mathbb{Z}$ **គេមាន** $mn\left(m^{60} - n^{60}\right)$ **ចែកដាច់នឹង** 56786730 **ជានិច្ច។**

ចំលើយ

តាង $a = 56786730 = 2.3.5.7.11.13.31.61$ ។ តាង

$$Q(x,y) = xy\left(x^{60} - y^{60}\right)$$

យើងសង្កេតឃើញថា

$$(x-y) \mid Q(x,y); \qquad \left(x^2 - y^2\right) \mid Q(x,y);$$

$$\left(x^3 - y^3\right) \mid Q(x,y); \qquad \left(x^4 - y^4\right) \mid Q(x,y);$$

$$\left(x^6 - y^6\right) \mid Q(x,y); \qquad \left(x^{10} - y^{10}\right) \mid Q(x,y);$$

$$\left(x^{12}-y^{12}\right)|\,Q(x,y);\ \ \left(x^{30}-y^{30}\right)|\,Q(x,y);$$

តាមទ្រឹស្តីបទ**ភែម៉ា** ចំពោះចំនួនបឋម p មួយ យើងទាញបាន

$$m^{p}-m\equiv 0\pmod p \text{ និង } n^{p}-n\equiv 0\pmod p$$

ដូច្នេះ $n\left(m^{p}-m\right)-m\left(n^{p}-n\right)\equiv 0\pmod p$ មានន័យថា

$mn\left(m^{p-1}-n^{p-1}\right)\equiv 0\pmod p$ ។

ដូច្នេះ យើងមាន

$$2\,|\,mn(m-n)\,|\,Q(m,n);$$

$$3\,|\,mn\left(m^{2}-n^{2}\right)|\,Q(m,n);$$

$$5\,|\,mn\left(m^{4}-n^{4}\right)|\,Q(m,n);$$

$$7\,|\,mn\left(m^{6}-n^{6}\right)|\,Q(m,n);$$

$$11\,|\,mn\left(m^{10}-n^{10}\right)|\,Q(m,n);$$

$$13\,|\,mn\left(m^{12}-n^{12}\right)|\,Q(m,n);$$

$$31\,|\,mn\left(m^{30}-n^{30}\right)|\,Q(m,n);$$

$$61\,|\,mn\left(m^{60}-n^{60}\right)|\,Q(m,n);$$

ដោយ $2,3,5,7,...,61$ ទាំងអស់នេះជាចំនួនបឋម នោះយើងទាញបាន $a\,|\,mnQ(m,n)$ ។

417. គេអោយចំនួនបឋមសេស p ។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល p ចែកដាច់ $n2^{n}+1$ ។

ចំលើយ

ចំពោះចំនួនបឋមសេស p ណាមួយ យើងយក $n=(p-1)^{2k+1}, k=0,1,2,\ldots$ នោះ

$$n2^n+1=(p-1)^{2k+1}\left(2^{p-1}\right)^{(p-1)^{2k}}+1$$
$$\equiv(-1)^{2k+1}1^{(-1)^{2k}}+1\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

418. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ $n>1$ ដែល n ចែកដាច់ 2^n-1 ទេ។

ចំលើយ

បើ $n|2^n-1$ ចំពោះចំនួនគត់ $n>1$ ណាមួយ នោះ n ត្រូវតែជាចំនួនសេស និង មានតួចែកបឋមសេស p តូចបំផុត។ យើងមាន p ចែកដាច់ n ហើយ n ចែកដាច់ 2^n-1 និង ដូច្នេះ $2^n\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ ។ តាង m ជាចំនួនគត់តូចបំផុត ដែល $2^m\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ ។ តាង $n=xm+y, 0\le y<m$ ។ ដូច្នេះ

$$2^y=2^{n-xm}=2^n.\left(2^m\right)^{-x}\equiv 1.1^{-x}=1(\mathrm{mod}\, p)$$

បើ $y>0$ នោះ $2^y\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ ដូច្នេះយើងមាន $y<m$ ដែល $2^y\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ ផ្ទុយពីសន្មតិដែល ថា m តូចជាងគេ។ ដូច្នេះ $y=0$ មានន័យថា m ចែកដាច់ n ។ ដោយ n ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ m ក៏សេសដែរ។

តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** យើងមាន $2^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ ។ ដោយ m ជាចំនួនតូចជាងគេដែល $2^m\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ នោះ $m<p-1$ ។ ដូច្នេះ $m\le p-2<p$ ។ ផ្ទុយពីសន្មតិដែល p តូចជាងគេ។

419. តាង p ជាចំនួនបឋមមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

១) $\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \pmod{p}, 1 \leq n \leq p-1$

២) $\binom{p+1}{n} \equiv 0 \pmod{p}, 2 \leq n \leq p-1$

ចំលើយ

១) យើងមាន $(p-1)(p-2)...(p-n) \equiv (-1)(-2)...(-n) \equiv (-1)^n n! \pmod{p}$ ។
សំនើពិត។

២) យើងមាន $(p+1)p(p-1)...(p-n+2) \equiv (1)(0)(-1)...(-n+2)$
$\equiv 0 \pmod{p}$ ។ សំនើពិត។

420. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល ៣ ចែកដាច់ $n.2^n+1$។

421. ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល n ចែកដាច់ 2^n+2 ។

422. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនបឋម p ដែល p ចែកដាច់ 2^p+1។(ចំលើយ $p=3$)។

423. បើ p និង q ជាចំនួនបឋមខុសគ្នា ចូរបង្ហាញថា

pq ចែកដាច់ $\left(a^{pq}-a^p-a^q-a\right)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a។

424. បើ p ជាចំនួនបឋម ចូរបង្ហាញថា p ចែកដាច់ $a^p+(p-1)!a$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a។

425. បើ $(mn,42)=1$ ចូរបង្ហាញថា 168 ចែកដាច់ m^6-n^6។

426. បើ p និង q ជាចំនួនបឋមខុសគ្នា ចូរបង្ហាញថា

$$q^{p-1}+p^{q-1}\equiv 1\pmod{pq}$$

427. បើ p ជាចំនួនបឋមសេស ចូរបង្ហាញថា $n^p\equiv n\pmod{2p}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n។

428. បើ p ជាចំនួនបឋមសេស និង p ចែកដាច់ m^p+n^p ចូរបង្ហាញថា p^2 ចែកដាច់ m^p+n^p ។

429. ចូរបង្ហាញថា $n>1$ ជាចំនួនបឋម លុះត្រាតែ $(n-1)!\equiv -1\pmod{n}$ និងច្រាសមកវិញ។

430. ចូរបង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋមសេស នោះ

$$1^2.3^2...(p-2)^2\equiv 2^2.4^2...(p-1)^2\equiv(-1)^{(p-1)/2}\pmod{p}$$

431. ចូរបង្ហាញថា ១៩ ចែកដាច់ $2^{2^{6k+1}}+3$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន k។

432. និយមន័យ

$d(n)$ ជាចំនួនតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n

$\sigma(n)$ ជាផលបូកនៃបណ្តាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n

$\sigma_s(n)$ ជាផលបូកស្វ័យគុណ s នៃបណ្តាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n

$P(n)$ ជាផលគុណបណ្តាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n។

$\phi(n)$ ជាចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលធំមិនលើសពី n និងបឋមនឹង n។ គេហៅ $\phi(n)$ ថាជាអនុគមន៍អឺលែរ។

$\omega(n)$ ជាចំនួនតួចែកបឋមខុសៗគ្នារបស់ n។

$\Omega(n)$ ជាចំនួនតួចែកបឋមរបស់ n រាប់មិនបាច់គិតថាខុសគ្នារឺអត់ទេ(ស្មើនឹងផលបូកនៃស្វ័យគុណរបស់កត្តាបឋមរបស់ n ឧទាហរណ៍ $20 = 2^2.5$ យើងមាន ២ចំនួន ២ដង ៥ចំនួន១ដង ដូច្នេះ $\Omega(20) = 2 + 1 = 3$)។

អនុគមន៍ខាងលើអាចតាងជាសញ្ញាដោយ

$$d(n) = \sum_{d|n} 1;\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d;\ \omega(n) = \sum_{p|n} 1;\ \Omega(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \alpha$$

$$\phi(n) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ (k,n)=1}} 1$$

(សញ្ញា $\|$ នៅក្នុង $p^\alpha \| n$ មានន័យថា $p^\alpha | n$ តែ $p^{\alpha+1} \nmid n$)

ឧទាហរណ៍ ១,២,៤,៥,១០,២០ជាតួចែករបស់២០។ យើងមាន $d(20) = 6$; $\sigma(20) = 42;\ \omega(20) = 2;\ \Omega(20) = 3$។ ដោយ $1,3,7,9,11,13,17,19$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំមិនលើសពី២០ និងបឋមនឹង២០ នោះ $\phi(20) = 8$។

433. ទ្រឹស្តីបទ

បើផលគុណកត្តាបឋមរបស់ n មានរាង $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ នោះ យើងមាន

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$$

$$\sigma_s(n) = \frac{p_1^{s(\alpha_1+1)} - 1}{p_1^s - 1} . \frac{p_2^{s(\alpha_2+1)} - 1}{p_2^s - 1} \dots \frac{p_k^{s(\alpha_k+1)} - 1}{p_k^s - 1}$$

$$P(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ករណី P ដែលពិបាកជាងគេ ករណីផ្សេងទៀត អាចស្រាយបញ្ជាក់តាមរបៀបដូចគ្នា។

តួចែកវិជ្ជមានមួយរបស់ n មានរាង $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ ដែល $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ ។ ផលគុណរបស់បណ្តាតួចែកទាំងអស់របស់ n មានរាង $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$ ។

ដូច្នេះយើងនឹងគណនាបណ្តាស្វ័យគុណ γ_i ។ យើងយកចំនួនគត់មួយ $v \in \{0, 1, \dots, \alpha_1\}$ ។ តួចែករបស់ n ដែល $\beta_1 = v$ មានទាំងអស់ចំនួន $(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$ ។ ពេលយើងគុណតួចែកទាំងអស់នេះ បញ្ចូលគ្នា យើងបាន

$$\gamma_1 = (\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1) \sum_{v=0}^{\alpha_1} v$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_1 (\alpha_1 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$$

$$= \alpha_1 . \frac{d(n)}{2}$$

យើងទាញបានរូបមន្តដូចគ្នាចំពោះ γ_i ។

434. (**អាមេរិច ១៩៨៨**) ចូរគណនាប្រូបាប៊ីលីតេ ក្នុងការជ្រើសរើសដោយចៃដន្យនូវតួចែកវិជ្ជមាន
របស់ 10^{99} បានជាចំនួនពហុគុណនៃ10^{88} ។

ចំលើយ

យើងមាន $10^{99} = 2^{99}.5^{99}$ ។ ដូច្នេះតួចែករបស់ 10^{99} មានរាង $2^a.5^b$ ដែល a និង b ជាចំនួនគត់ដែល $0 \le a,b \le 99$ ។ ចំពោះ a,b និមួយៗ យើងមានជំរើសចំនួន១០០យ៉ាង ដូច្នេះ 10^{99} មានតួចែកគត់វិជ្ជមានចំនួន 100.100 ។ ក្នុងចំនោមចំនួនទាំងនេះ បណ្តាពហុគុណនៃ $10^{88} = 2^{88}.5^{88}$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $88 \le a,b \le 99$ ។ ដូច្នេះយើងមានជំរើស a,b ចំនួន១២បែប ដូច្នេះ មាន 12.12 ក្នុងចំនោមតួចែកចំនួន100.100 នៃ 10^{99} ដែលជាពហុគុណនៃ 10^{88} ។ ដូច្នេះប្រូបាប៊ីលីតេដែលចង់បានគឺ $\dfrac{12.12}{100.100} = \dfrac{9}{625}$ ។

435. ចូរគណនាចំនួនតំរៀបនៃគូ (a,b)នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $PPCM$ នៃ a និង b
ស្មើនឹង $2^3 5^7 11^{13}$ ។

ចំលើយ

a និង b ជាតួចែករបស់ $2^3 5^7 11^{13}$ ដូច្នេះ $a = 2^x 5^y 11^z$ និង $b = 2^s 5^t 11^u$ ចំពោះ ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x,y,z,s,t,u ខ្លះ។ ដោយ $2^3 5^7 11^{13}$ ជា $PPCM$ នៃ a,b ដូច្នេះ $\max(x,s) = 3$, $\max(y,t) = 7$ និង $\max(z,u) = 13$ ។ ដូច្នេះ (x,s) អាចជា $(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0)$ ដូច្នេះយើងមានជំរើស ៧បែបនៃ (x,s)

។ ដូចគ្នាយើងមាន ជំរើស 15 និង 27 បែបចំពោះ (y,t) និង (z,u) ។ ដូច្នេះយើងមាន $7\times 15\times 27 = 2835$ គំរៀបនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,b) ដែលមាន $PPCM = 2^3 5^7 11^{13}$ ។

436. ចូរគណនាផលគុណនៃបណ្តាតួចែកវិជ្ជមានខុសគ្នា របស់ $n = 420^4$ ។

ចំលើយ

យើងមាន $n = \left(2^2.3.5.7\right)^4$ ។ ដូច្នេះ d ជាតួចែករបស់ n លុះត្រាតែ d អាចសរសេរជារាង $2^a.3^b.5^c.7^d$ បាន ដែល $0 \le a \le 8, 0 \le b \le 4, 0 \le c \le 4$ និង $0 \le d \le 4$ ។ ដូច្នេះយើងមាន 9,5,5 និង 5 តំលៃផ្សេងគ្នានៃ a,b,c និង d ។ ដូច្នេះ n មានតួចែកវិជ្ជមានចំនួន $9.5.5.5 = 1125$ ។ បើ $d \ne 420^2$ នោះ $\dfrac{420^4}{d}$ ក៏ជាតួចែករបស់ n ដែរ ហើយផលគុណនៃតួចែកទាំង២ស្មើ 420^4 ។ ដូច្នេះ យើងអាចចែកតួចែកទាំង 1125 របស់ n លើកលែងតែ 420^2 ចេញ ជា 562 គូតួចែក ដែលមានរាង $\left(d, \dfrac{n}{d}\right)$ ហើយផលគុណនៃតួចែក២នេះ ស្មើ 420^4 ។ ដូច្នេះចំលើយគឺ $420^{4.562}.420^2 = 420^{2250}$

437. ចូរគណនាផលបូកនៃតួចែកវិជ្ជមានគូរបស់ 10000 ។

ចំលើយ

តួចែកគូរបស់ 10000 មានរាង $2^a 5^b$ ដែល a និង b ជាចំនួនគត់ ដែល $1 \le a \le 5$ និង $0 \le b \le 5$ ។ ផលបូកតួចែកសេសវិជ្ជមានរបស់ 10000 ស្មើនឹង

$$\left(2+2^2+2^3+2^4+2^5\right)\left(1+5+5^2+5^3+5^4+5^5\right)$$

$$=62.\frac{5^6-1}{5-1}=242172$$

438. (អាមេរិច ១៩៩៣) តើមាន n ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលពហុកោណមួយ មាន n ជ្រុង មានមុំក្នុងជា ចំនួនគត់គិតជាដឺក្រេ?។

ចំលើយ

រង្វាស់មុំក្នុងរបស់ពហុកោណនិយ័តមួយដែលមាន n ជ្រុង ស្មើនឹង $\frac{(n-2)180}{n}$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា n ត្រូវតែចែកដាច់១៨០។ ដោយ $180=2^2.3^2.5$ មានតួចែកចំនួន $(1+2)(1+2)(1+1)=18$ នោះ ចំលើយគឺ ១៦ ព្រោះ $n\geq 3$ ដូច្នេះយើងមិនគិតតួចែក លេខ១និងលេខ២។

439. ចូរបង្ហាញថា $d(n)\leq 2\sqrt{n}$ ។

ចំលើយ

គ្រប់តួចែកវិជ្ជមាន a និមួយៗនៃ n អាចផ្គូគ្នាជាមួយ តួចែករបស់ n មួយទៀតគឺ $\frac{n}{a}$ ។ ដោយ $n=a.\frac{n}{a}$ នោះ ត្រូវតែមានតួចែកមួយក្នុងចំនោមនេះដែល $\leq\sqrt{n}$ ។

តាង $d_1<d_2<....<d_k$ ជាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n ដែលធំមិនលើសពី $\sqrt{n}$ ។ តួចែករបស់ n ផ្សេងទៀតគឺ

$$\frac{n}{d_1},\frac{n}{d_2},\dots,\frac{n}{d_k}$$

ដោយ $k \le \sqrt{n}$ ដូច្នេះ $d(n) \le 2k \le 2\sqrt{n}$ ។

440. ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់ n ដែល $d(n)=6$ ។

ចំលើយ

$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)=6 \ =2.3$ រឺ 6.1 នោះ n ត្រូវតែមានកត្តាបឋមខុសគ្នាតែ២ប៉ុណ្ណោះ គឺ p និង q ។ដូច្នេះ $n=p^{\alpha}q^{\beta}$ និង $1+\alpha=2;1+\beta=3$ រឺក៏ $1+\alpha=6;1+\beta=1$ ។ ដូច្នេះ n ត្រូវតែមានរាង $n=pq^2$ រឺក៏ $n=p^5$ ដែល p,q ជាចំនួនបឋមខុសគ្នា។

441. ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{k=1}^{n} d(k)=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{n}{j}\right]$$

ចំលើយ

យើងមាន
$$\sum_{k=1}^{n} d(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j|k}1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j|k}1=\sum_{j\le n}\sum_{\substack{j\le k\le n\\(k\equiv 0 \bmod j)}}1=\sum_{j\le n}\left[\frac{n}{j}\right]$$

442. ចំនួនឥតខ្ចោះ

យើងហៅថាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយជាចំនួនឥតខ្ចោះ បើវាស្មើនឹងផលបូកតួចែកវិជ្ជមានរបស់វា ក្រៅពីខ្លួនវា។ ឧទាហរណ៍ ៦ជាចំនួនឥតខ្ចោះ ព្រោះ $6=\sum_{d|6,d\neq 6} d=1+2+3$ ។

443. ចូរបង្ហាញថា ចំនួនគូមួយ ឥតខ្ចោះ លុះត្រាតែ វាមានរាង $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ ដែល p និង 2^p-1 ជាចំនួនបឋម និងច្រាសមកវិញ។

ចំលើយ

សន្មតថា $p,2^p-1$ ជាចំនួនបឋម។ នោះ $\sigma\left(2^p-1\right)=1+2^p-1$ ។ ដោយ $\left(2^{p-1},2^p-1\right)=1$ នោះ $\sigma\left(2^{p-1}\left(2^p-1\right)\right)=\sigma\left(2^{p-1}\right)\sigma\left(2^p-1\right)$ $=\left(1+2+2^2+...+2^{p-1}\right)\left(1+2^p-1\right)=\left(2^p-1\right)2\left(2^{p-1}\right)$ ។ ដូច្នេះ ផលបូកតួចែករបស់ $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ **ក្រៅពីខ្លួនវា ស្មើនឹង** $\sigma\left(2^{p-1}\left(2^p-1\right)\right)-2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ $=2^{p-1}\left(2^p-1\right)$។ ដូច្នេះ $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ ជាចំនួនឥតខ្ចោះ។

ច្រាសមកវិញ តាង n ជាចំនួនគត់គូ។ តាង $n=2^s m,m$ សេស។ នោះ $\sigma(n)=\sigma\left(2^s\right)\sigma(m)=\left(2^{s+1}-1\right)\sigma(m)$ ។ ដោយ n ជាចំនួនឥតខ្ចោះ នោះ $\sigma(n)=2n=2^{s+1}m$ ។ ដូច្នេះ $\left(2^{s+1}-1\right)\sigma(m)=2^{s+1}m$ ។ គេទាញបាន $2^{s+1}\mid\sigma(m)$ និងដូច្នេះ $\sigma(m)=2^{s+1}b$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ b ណាមួយ។ ដូច្នេះ $\left(2^{s+1}-1\right)b=m$ និង ដូច្នេះ $b\mid m,b\neq m$ ។

យើងចង់បង្ហាញថា $b=1$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា $b+m=\left(2^{s+1}-1\right)b+b$ $=2^{s+1}b=\sigma(m)$ ។ បើ $b\neq 1$ នោះ មានយ៉ាងតិចតួចែករបស់ m ចំនួន៣ តាងដោយ $1,b$

និងm ដែល $\sigma(m)\geq 1+b+m$ ផ្ទុយពីការណ៍ពិត។ ដូច្នេះ $b=1$ ដូច្នេះ $m=\left(2^{s+1}-1\right)b=2^{s+1}-1$ ត្រូវតែជាចំនួនបឋម។ បើ $s+1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះ $s+1=kl$ ។ នោះ

$2^{s+1}-1=\left(2^{k}\right)^{l}-1=\left(2^{k}-1\right)\left(1+2^{k}+\ldots+2^{k(l-1)}\right)=\left(1+2+\ldots+2^{k-1}\right)$ $\left(1+2^{k}+\ldots+2^{k(l-1)}\right)$ ដូច្នេះមិនអាចជាចំនួនបឋមទេ។ ដូច្នេះ $s+1=p$ ត្រូវតែជាចំនួនបឋម។ ដូច្នេះ p និង $2^{p}-1$ ជាចំនួនបឋម ហើយ $n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$ ។

444. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិn គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិx និងy ដែល $x-y\geq n$ និង $\sigma\left(x^{2}\right)=\sigma\left(y^{2}\right)$។

ចំលើយ

តាង $s\geq n,(s,10)=1$ ។ យើងយក$x=5s;y=4s$ ។ នោះ

$\sigma\left(x^{2}\right)=\sigma\left(y^{2}\right)=31\sigma\left(s^{2}\right)$ ។

445. ចូរគណនា $d(1024),\sigma(1024),\omega(1024),\Omega(1024)$ និង$\phi(1024)$។

446. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិn ដែល $d(n)=10$។

447. ចូរបង្ហាញថា

$$d\left(2^{n}-1\right)\geq d(n)$$

448. ចូរបង្ហាញថា $d(n)\leq\sqrt{3n}$ និង សមភាពកើតមានពេល $n=12$ មួយប៉ុណ្ណោះ។

449. ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1-t^n}$$

450. តាង $d_1(n) = d(n), d_k(n) = d\left(d_{k-1}(n)\right), k = 2,3,...$។ ចូរកំនត់ $d_k(n)$ ពេល k ធំខ្លាំង។

451. ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{d|n} d = n^{d(n)/2}$$

452. ចូរបង្ហាញថា ស្វ័យគុណនៃចំនួនបឋម មិនអាចជាចំនួនឥតខ្ចោះទេ។

453. (**អាមេរិច ១៩៩៥**) តាង $n = 2^{31}3^{19}$។ តើតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n^2 មានចំនួនប៉ុន្មានដែលតូចជាង n និងចែក n មិនដាច់?។

454. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនពហុគុណ នោះ $\sigma(n) > n + \sqrt{n}$ ។

455. គេអោយ $k > 1$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយ។ ចូរបង្ហាញថា សមីការ $\sigma(n) = n + k$ មានរឹសក្នុងចំនួនកំនត់។

456. ចូរបញ្ជាក់ពីគ្រប់ n ដែល $\sigma(n)$ ជាចំនួនសេស។

457. ចូរបង្ហាញថា p ជាចំនួនបឋម បើ $\sigma(p) = 1 + p$ និងច្រាសមកវិញ។

458. ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{\sigma(n!)}{n!} \geq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

459. ចូរបង្ហាញថា ចំនួនគត់អត់ខ្ចោះសេស ត្រូវតែមានយ៉ាងហោចណាស់តួចែកបឋម២ខុសគ្នា។

460. ចូរបង្ហាញថា នៅក្នុងចំនួនគត់ឥតខ្ចោះសេសមួយ មានកត្តាបឋមតែមួយតួប៉ុណ្ណោះដែលមានស្វ័យគុណសេស ផ្សេងពីនេះមានស្វ័យគុណគូទាំងអស់។

461. ចូរបង្ហាញថា ចំនួនគត់ឥតខ្ចោះសេសមួយ ត្រូវតែមានកត្តាបឋម p មួយ ដែលបើស្វ័យគុណធំបំផុតរបស់ p ក្នុង n គឺ p^a នោះ ទាំង p និង a សុទ្ធតែសមមូលទៅនឹង១តាម៤, កត្តាបឋមផ្សេងទៀតត្រូវតែមានស្វ័យគុណសេស។

462. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ឥតខ្ចោះសេស ដែលមានកត្តាបឋម៣ខុសគ្នា ត្រូវតែមាន២ក្នុងចំនោមនោះជាលេខ៣និង៥។

463. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ឥតខ្ចោះសេស ដែលមានកត្តាបឋម៣ខុសគ្នាទេ។

464. ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\sum_{j=1}^{n}j\left[\frac{n}{j}\right]$$

465. ចូរកំនត់ចំនួនត្រីធាតុនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\{a,b,c\}$ ដែល $a.b.c=462$។

466. ទ្រឹស្តីបទ អឺលែ

បើ $(a,n)=1$ នោះ $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងមាន $n>1$ ។ តាង $1=a_1<a_2<,\dots,<a_{\phi(n)}=n-1<n$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង n ហើយបឋមនឹង n ដែល $n>1$ ។ គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលបឋមនឹង n ពេលចែកនឹង n សល់សំនល់ជា a_i មួយក្នុងចំនោម $a_i, 1\le i\le \phi(n)$ ។

ដោយ $(a,n)=1$ នោះ $aa_1, aa_2, \dots, aa_{\phi(n)}$ ក៏បឋមនឹង n ដែរ។ ដូច្នេះ បណ្តា aa_i ទាំងនេះសមមូលនឹង a_j មួយ ដែល $1\le j\le \phi(n)$ តាម n ។ បណ្តា aa_i ខុសៗគ្នាសមមូលនឹង a_j ខុសគ្នាដែរ តាម n ។ ព្រោះបើមាន $aa_i \equiv a_k \pmod{n}$ និង $aa_j \equiv a_k \pmod{n}$ នោះ

$a_j(aa_i) \equiv a_j a_k \pmod{n} \Rightarrow$

$a_i(aa_j) \equiv a_j a_k \pmod{n} \Rightarrow a_i a_k \equiv a_j a_k \pmod{n} \Rightarrow a_i \equiv a_j \pmod{n}$ ។

ដូច្នេះ

$$aa_1.aa_2....aa_{\phi(n)} \equiv a_1 a_2 ....a_{\phi(n)} \pmod{n}$$

$$\Rightarrow \quad a^{\phi(n)} a_1.a_2....a_{\phi(n)} \equiv a_1 a_2 ....a_{\phi(n)} \pmod{n}$$

$$\Rightarrow \quad \left(a^{\phi(n)}-1\right) a_1.a_2....a_{\phi(n)} \equiv 0 \pmod{n}$$

ដោយ $\left(a_1 a_2 ... a_{\phi(n)}, n\right)=1$ នោះ $\left(a^{\phi(n)}-1\right) \equiv 0 \pmod{n}$ ។

467. តាង p ជាចំនួនបឋម ដែល $p>5$ ។ ចូរបង្ហាញថា $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$ ។

ចំលើយ

យើងមាន $240=2^4.3.5$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**កែម៉ា** យើងមាន $p^2\equiv 1(\bmod 3)$ និង $p^4\equiv 1(\bmod 5)$ ។

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានសេសសុទ្ធតែបឋមនឹង 2^4 ។ ដូច្នេះ $\phi\left(2^4\right)=2^3=8$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ **អឺលែ** យើងទាញបាន $p^8\equiv 1(\bmod 16)$ ។ ដូច្នេះ $p^8\equiv 1(\bmod m)$ ចំពោះ $m=3,5$ និង 16 ។ នាំអោយ $p^8\equiv 1(\bmod 240)$ ។

468. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់គូវិជ្ជមាន n យើងមាន n^2-1 ចែកដាច់ $2^{n!}-1$ ។

ចំលើយ

តាង $m=n+1$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $m(m-2)$ ចែកដាច់ $2^{(m-1)!}-1$ ។ យើងមាន $\phi(m)$ ចែកដាច់ $(m-1)!$ ដូច្នេះ $\left(2^{\phi(m)}-1\right)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ហើយ តាមទ្រឹស្តីបទ **អឺលែ** យើងទាញបាន $m|\left(2^{\phi(m)}-1\right)$ ។ ដូច្នេះ $m|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $(m-2)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។ ដោយ m ជាចំនួនសេស នោះ $(m,m-2)=1$ ដូច្នេះ $m(m-2)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។

469. (លំហាត់ផ្ញើទៅ **គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ២០០៣**)

ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចបំផុត ដើម្បីអោយមាន ចំនួនគត់ $x_1,x_2,\dots,x_k$ ដែល

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3 = 2002^{2002}$$

ចំលើយ

ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា 2002^{2002} មិនមែនជាផលបូកនៃ គូបពទេ។ យើងមាន $2002 \equiv 4 \pmod 9$ ដូច្នេះ $2002^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod 9$ ដូច្នេះ

$$2002^{2002} \equiv \left(2002^3\right)^{667} .2004 \equiv 4 \pmod 9$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងមាន $x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។ ដូច្នេះ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \not\equiv 4 \pmod 9$ ។ ដូច្នេះ 2002^{2002} មិនមែនជាផលបូកនៃ គូប៣ទេ។ បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា 2002^{2002} អាចជាផលបូកនៃគូប៤។ យើងមាន

$$2002 = 10^3 + 10^3 + 1^3 + 1^3$$

និង $$2002 = 667.3 + 1$$

ដូច្នេះ

$$2002^{2002} = 2002.\left(2002^{667}\right)^3$$
$$= \left(10.2002^{667}\right)^3 + \left(10.2002^{667}\right)^3 + \left(2002^{667}\right)^3 + \left(2002^{667}\right)^3$$

ដូច្នេះ $k = 4$ ។

470. ទ្រឹស្តីបទ

តាង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $a^k \equiv 1 \pmod m$។ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែល $a^x \equiv 1 \pmod m$ បានទាល់តែ x ជាពហុគុណនៃ k និងច្រាសមកវិញ។

សំរាយបញ្ជាក់

បើ x ជាពហុគុណនៃ k នោះ $x=kl$ ។ ដោយ $a^k\equiv 1\pmod m$ នោះ $\left(a^k\right)^l\equiv 1\pmod m$ ។

ប្រាសមកវិញ សន្មតថា $a^x\equiv 1\pmod m$ ។ យក $x=kl+p, 0\le p<k$ ។ ដូច្នេះ $p=x-kl$ ។ យើងមាន

$$a^p=a^{x-kl}=a^x a^{-kl}\equiv 1.1^{-l}=1\pmod m$$

បើ $p>0$ នោះ មាន $p<k$ ដែល $a^p\equiv 1\pmod m$ ។ ដូច្នេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា k តូចជាងគេ។ ដូច្នេះ $p=0$ ។ ដូច្នេះ $x=kl$ ។ ដូច្នេះ x ជាពហុគុណនៃ k ។

471. (**អាមេរិច ២០០១**) **តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលជាពហុគុណនៃ 1001 ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលអាចសរសេរជារាង 10^j-10^i បាន ដែល i និង j ជាចំនួនគត់ ហើយ $0\le i<j\le 99$?។**

ចំលើយ

យើងមាន $\quad 10^j-10^i=10^i\left(10^{j-i}-1\right)\quad$ និង 1001 បឋមនឹង 10^i ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរក i និង j ដែល $10^{j-i}-1$ ចែកដាច់នឹង 1001 ។ យើងមាន $10^3\equiv -1\pmod{1001}$ ដូចនេះ $10^6\equiv 1\pmod{1001}$ ។ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា 6 ជាចំនួនតូចជាងគេដែល $10^6\equiv 1\pmod{1001}$ ។ ដូច្នេះ $10^{j-i}\equiv 1\pmod{1001}$ ទាល់តែ $j-i=6n$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ណាមួយ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរាប់ចំនួនចំលើយជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន របស់សមីការ

$$6n=j-i$$

ដែល $j\le 99, i\ge 0$ ហើយ $n>0$ ។ ដូច្នេះ $n\le 16$ ។

ចំពោះ $n=1$ សមីការទៅ ជា $j-i=6$ ដូច្នេះ

$(j,i)=(6,0),(7,1),(8,2),....,(99,93)$ មាន 94 ចំលើយ

ចំពោះ $n=2$ សមីការទៅ ជា $j-i=12$ ដូច្នេះ

$(j,i)=(12,0),(13,1),(14,2),....,(99,87)$ មាន 88 ចំលើយ។

......

ចំពោះ $n=16$ សមីការទៅ ជា $j-i=96$ ដូច្នេះ

$(j,i)=(96,0),(97,1),(98,2),....,(99,3)$ មាន 4 ចំលើយ។

ដូច្នេះជាសរុប មាន $94+88+82+...+4=784$ ចំលើយ។

472. ទ្រឹស្តីបទ

តាង a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរដែលបឋមគ្នា នោះ

$\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយដែល $n=ab,(a,b)=1$ ។ យើងតំរៀបចំនួនគត់ចំនួនab ដែលមាន $1,2,...,ab$ ដូចខាងក្រោម

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & ... & k & ... & a \\
a+1 & a+2 & a+3 & ... & a+k & ... & 2a \\
2a+1 & 2a+2 & 2a+3 & ... & 2a+k & ... & 3a \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
(b-1)a+1 & (b-1)a+2 & (b-1)a+3 & ... & (b-1)a+k & ... & ba
\end{array}$$

ចំនួនគត់r មួយ បឋមនឹងn បើ វាបឋមនឹងa និងនឹងb និងច្រាសមកវិញ។ ជាដំបូងយើងនឹងកំនត់ចំនួននៃចំនួនគត់ក្នុងតារាងខាងលើ ដែលបឋមនឹងa និងបន្ទាប់មកគណនាអោយឃើញថា តើមានចំនួនប៉ុន្មានក្នុងចំណោមនោះដែលបឋមនឹងb ។

មានចំនួនគត់ចំនួន$\phi(a)$ នៅក្នុងបន្ទាត់ដេកទី១ដែលបឋមនឹងa ។ ឥលូវយើងមើលបន្ទាត់ឈរទីk ដែល$1\le k\le a$ ។ ចំនួនគត់និមួយៗស្ថិតនៅក្នុងជួរឈរមួយនេះ មានរាង $ma+k, 0\le m\le b-1$ ។ ដោយ $k\equiv ma+k \pmod a$ នោះ k មានកត្តារួមមួយជាមួយa លុះត្រាតែ $ma+k$ ក៏មាន កត្តារួមមួយជាមួយa ដែរ និងច្រាសមកវិញ។ បន្ទាត់ឈរនិមួយៗ មានចំនួនគត់ចំនួន $\phi(a)$ ដែលបឋមនឹង a ។ បន្ទាប់មកយើងកំនត់ថាតើមានចំនួនគត់ចំនួនប៉ុន្មានក្នុងចំណោមនេះ ដែលបឋមនឹងb ។

យើងនិយាយថា មិនអាចមានចំនួនគត់២ក្នុងចំនោម $k, a+k, \ldots, (b-1)a+k$ នៅលើបន្ទាត់ឈរទីk សមមូលគ្នាតាម b ទេ។ បើមិនអញ្ចឹងទេ បើសិនជា $ia+k\equiv ja+k \pmod b$ នោះ $a(i-j)\equiv 0 \pmod b$ ។ ដោយ$(a,b)=1$ នោះ $i-j\equiv 0\pmod b$ ។ ដោយ $i,j\in[0,b-1]$ នាំអោយ $|i-j|<b$ ។ នាំអោយ $i=j$ ។ មានន័យថា បណ្តាb ចំនួនគត់ នៅក្នុងចំនោមចំនួនទាំង$\phi(a)$ តាមបន្ទាត់ឈរ សមមូលទៅនឹង$0,1,\ldots,b-1$ ។ តែមានតែ$\phi(b)$ ក្នុងចំនោមនេះប៉ុណ្ណោះដែលបឋមនឹងb ។ មានន័យថា មានចំនួនគត់តែ$\phi(a)\phi(b)$ ប៉ុណ្ណោះ នៅក្នុងតារាងនេះ ដែលបឋមនឹងab ។

សំគាល់

$-$បើ p ជាចំនួនបឋម និង m ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះចំនួនគត់

$$p, 2p, 3p, \ldots, p^{m-1}p$$

ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតែមួយបែបគត់ដែល$\le p^m$ និងមានកត្តារួមជាមួយ p^m ។ដូច្នេះ $\phi\left(p^m\right)=p^m-p^{m-1}$ ។

$-$បើ $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$ ជាផលគុណកត្តាបឋមរបស់n នោះ

$$\phi(n)=\left(p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1}\right)\ldots\left(p_k^{a_k}-p_k^{a_k-1}\right)$$

473. ទ្រឹស្តីបទ

គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន n។ ចូរបង្ហាញថា $\sum_{d|n}\phi(d)=n$។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងពិនិត្យសំនុំនៃចំនួនសនិទាន

$$\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}$$

យើងដឹងថា សំនុំនេះមានធាតុទាំងអស់ចំនួន n។ ក្រោយសំរួលប្រភាគនេះហើយ យើងនឹងទទួលបានសំនុំថ្មី ដែលភាគបែងនិងភាគយក បឋមនឹងគ្នា។ បណ្តាភាគបែងក្នុងសំនុំថ្មីសុទ្ធតែជាតួចែករបស់ n។ តាង d ជាភាគបែងមួយ។ នោះ ក្នុងសំនុំថ្មី មានធាតុចំនួន $\phi(d)$ ដែលមាន d ជាភាគបែង។ ដូច្នេះមានទាំងអស់ ចំនួន ចំនួន$\sum_{d|n}\phi(d)$ នៅក្នុងសំនុំថ្មី។ ដោយសំនុំទាំងពីរមានចំនួនតួស្មើគ្នា នោះ យើងទាញបានសំនើដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

474. តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

(១) គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង n ហើយបឋមនឹង n ។

(២) គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង $2n$ ហើយបឋមនឹង n។

ចំលើយ

តាង $S_1=\sum_{\substack{d<n\\(d,n)=1}} d$ និង $S_2=\sum_{\substack{d<2n\\(d,n)=1}} d$

តាង $d_1<d_2<....<d_{\phi(n)}$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង n ហើយបឋមនឹង n។

យើងមាន $(d,n)=1$ លុះត្រាតែ $(n-d,n)=1$។ យើងមាន $d_{\phi(n)}$ ធំជាងគេ ហើយបឋម

នឹង n ដូច្នេះ $n-d_{\phi(n)}$ បឋមនឹង n ដែរ តែតូចជាងគេ ដូច្នេះ ត្រូវតែ ជា d_1 ។ យើងទាញបាន

$$d_1+d_{\phi(n)}=n,\ d_2+d_{\phi(n)-1}=n,\dots,\ d_{\phi(n)}+d_1=n,$$

ដូច្នេះ $S_1=\dfrac{n\phi(n)}{2}$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងមាន

$$\sum_{\substack{n<d<2n\\(d,n)=1}} d=\sum_{\substack{d<n\\(d,n)=1}}(n+d)=n\phi(n)+\sum_{\substack{d<n\\(d,n)=1}} d$$

$$=n\phi(n)+\frac{n\phi(n)}{2}=\frac{3n\phi(n)}{2}$$

ដូច្នេះ $S_2=\dfrac{n\phi(n)}{2}+\dfrac{3n\phi(n)}{2}=2n\phi(n)$ ។

475. បើ $p-1$ និង $p+1$ ជាចំនួនបឋម និង $p>4$ ចូរបង្ហាញថា $3\phi(p)\le p$ ។

ចំលើយ

សង្កេតឃើញថា បើ $p>4$ នោះ p ត្រូវតែជាពហុគុណនៃ៦ (បើ p មិនមែនជាពហុគុណនៃ៦ទេ នោះ $p-1$ និង $p+1$ មិនអាចជាចំនួនបឋមទេ)។ ដូច្នេះ

$$p=2^a3^bm,a,b\ge 1,(m,6)=1$$

$$\phi(p)=\phi\left(2^a3^bm\right)=\phi\left(2^a\right)\phi\left(3^b\right)\phi(m)=\left(2^a-2^{a-1}\right)\left(3^b-3^{b-1}\right)\phi(m)$$

$$=2^a\left(\frac{1}{2}\right)3^b\left(\frac{2}{3}\right)\phi(m)=\frac{1}{3}2^a3^b\phi(m)\le\frac{1}{3}2^a3^bm=\frac{p}{3}$$

476. ចូរអោយឧទាហរណ៏ចំនួនគត់ n ដែល $10|\phi(n)$។

ចំលើយ

យក $n=11^k, k=1,2,...$ នោះ $\phi\left(11^k\right)=11^k-11^{k-1}=10.11^{k-1}$

477. ចូរគណនា លេខ២ខ្ទង់ចុងគេរបស់ 3^{1000}។

ចំលើយ

ដោយ $\phi(100)=40,$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទ**អឺលែ** យើងទាញបាន $3^{40}\equiv 1(\text{mod}100)$។

ដូច្នេះ $3^{1000}=\left(3^{40}\right)^{25}\equiv 1^{25}=1(\text{mod}100)$។ ដូច្នេះលេខ១២ខ្ទង់ចុងគេគឺ ០១។

478. ចូរគណនា លេខ២ខ្ទង់ចុងគេរបស់ $7^{7^{1000}}$។

ចំលើយ

យើងមាន $\phi(100)=\phi\left(2^2\right)\phi\left(5^2\right)=\left(2^2-2\right)\left(5^2-5\right)=40$។ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទ **អឺលែ** $7^{40}\equiv 1(\text{mod}100)$។ យើងមាន $\phi(40)=\phi\left(2^3\right)\phi(5)=4.4=16$ ដូច្នេះ $7^{16}\equiv 1(\text{mod}\,40)$។ យើងមាន $1000=16.62+8$។ ដូច្នេះ

$7^{1000}\equiv\left(7^{16}\right)^{62}7^8\equiv 1^{62}7^8\equiv\left(7^4\right)^2\equiv 1^2\equiv 1(\text{mod}\,40)$។ មានន័យថា $7^{1000}=1+40t$ ចំពោះចំនួនគត់ t មួយ។ យើងទាញបាន

$$7^{7^{1000}}=7^{1+40t}\equiv 7.\left(7^{40}\right)^t\equiv 7(\text{mod}100)$$

មានន័យថា លេខ១២ខ្ទង់ចុងគេគឺ ០៧។

479. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៧៨)

m,n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $1\le m<n$។ នៅក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល១០ លេខពាខ្ទង់ចុងគេរបស់ 1978^m ដូចរៀងគ្នា នឹង លេខពាខ្ទង់ចុងគេរបស់ 1978^n ដែរ។ ចូរគណនា m,n ពេល $m+n$ មានតំលៃតូចបំផុត។

ចំលើយ

យើងមាន $m+n=n-m+2m$ ។ ដូច្នេះ $m+n$ តូចបំផុត ពេល $n-m$ និង $2m$ តូចបំផុត។

យើងមាន $1978^n-1978^m=1978^m\left(1978^{n-m}-1\right)$ ចែកដាច់នឹង$1000=2^3 5^3$ ។

ដោយកត្តាទី២ជាចំនួនសេស នោះ 2^3 ត្រូវតែចែកដាច់1978^m ដូច្នេះ $m\ge 3$ ។ ដូចគ្នា 5^3 ត្រូវតែចែកដាច់$1978^{n-m}-1$ ។ ដូច្នេះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត s មួយ ដែល

$$1978^s\equiv 1\pmod{125}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ**អឺលែ** $1978^{100}\equiv 1\pmod{125}$ ។ ដូច្នេះ $s\,|\,100$ ។ ដោយ $125\,|\left(1978^s-1\right)$ នោះ យើងមាន $5\,|\left(1978^s-1\right)$ មានន័យថា $1978^s\equiv 3^s\equiv 1\pmod 5$ ។ ដោយ $s\,|\,100$ នោះសមមូលក្រោយនេះ នាំអោយ $s=4,20,100$ ។ យើងពិនិត្យករណីនិមួយៗ។

ករណី $s=4,$ យើងមាន

$$1978^4\equiv(-22)^4\equiv 2^4.11^4\equiv(4.121)^2\equiv(-16)^2\equiv 6\pmod{125}$$

មានន័យថា $s\ne 4$ ។ ដូចគ្នាដែរ

$$1978^{20}\equiv 1978^4.\left(1978^4\right)^4\equiv 6.6^4\equiv 6.46\equiv 26\pmod{125}$$

មានន័យថា $s \neq 20$ ។ ដូច្នេះមានតែ $s = 100$ ។ ដោយ s ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $1978^s \equiv 1 \pmod{125}$ នោះ យើងយក $n - m = s = 100$ និង $m = 3$ មានន័យថា $n = 103, m = 3$ ។ យើងទាញបាន $m + n = 106$ ។

480. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៨៤)

ចូររកគូចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំង២ខាងក្រោម

(i) $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង៧

(ii) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ចំលើយទទួលបាន។

ចំលើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
(a+b)^7 - a^7 - b^7 &= 7\left(a^6b + ab^6 + 3\left(a^5b^2 + a^2b^5\right) + 5\left(a^4b^3 + a^3b^4\right)\right) \\
&= 7ab\left(a^5 + b^5 + 3ab\left(a^3 + b^3\right) + 5a^2b^2(a+b)\right) \\
&= 7ab(a+b)\left(a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 + a^2b^2\right. \\
&\qquad \left. +3ab\left(a^2 - ab + b^2\right) + 5ab\right. \\
&= 7ab(a+b)\left(a^4 + b^4 + 2\left(a^3b + ab^3\right) + 3a^2b^2\right) \\
&= 7ab(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right)^2
\end{aligned}$$

តាមសម្មតិកម្ម(i) និង (ii) យើងទាញបានសម្មតិកម្មថ្មី

(i) $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង៧

(ii') $a^2 + ab + b^2$ ចែកដាច់នឹង7^3

ដោយ $(a+b)^2 > a^2+ab+b^2 \ge 7^3$ នោះយើងទាញបាន $a+b \ge 19$ ។ ដោយសាកលេខ
ម្តងមួយៗ យើងទាញបាន $a=1, b=18$ ជាចំលើយមួយ ព្រោះ
$1^2+1.18+18^2=343=7^3$ ។

ឥលូវយើងកំនត់រកចំលើយផ្សេងខ្លះទៀតតាម ទ្រឹស្តីបទ**អឺលែ**។ ដោយ
$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ នោះ លក្ខខណ្ឌ (ii') ទៅជា

$$(ii")\quad \begin{cases} a^3 \equiv b^3 \left(\bmod 7^3\right) \\ a \not\equiv b \pmod 7 \end{cases}$$

យើងមាន $x^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ ។ ដោយ $\phi\left(7^3\right)=(7-1)7^2=3\times 98$ ។ ដូច្នេះ បើ x
បឋមនឹង 7^3 នោះយើងមាន $\left(x^{98}\right)^3 \equiv 1\left(\bmod 7^3\right)$ ដែលលក្ខណៈនេះផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ
ទី១នៃ $(ii")$ ។ ដូច្នេះយើងត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទី២ទៀត។ ឧទាហរណ៍ យក $x=2$
យើងឃើញថា $2^{98} \equiv 4 \pmod 7$ ។ ដូច្នេះយក $a=2^{98}, b=1$ ។ យក $x=3$ យើង
ឃើញថា $3^{98} \equiv 324\left(\bmod 7^3\right)$ ។ យើងឃើញថា $a=324, b=1$ ជាចំលើយមួយទៀត។

481. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ s គេមានចំនួនគត់ n មួយ ដែល
ចែកដាច់នឹង s ហើយ
ដែលផលបូកតួលេខទាំងអស់របស់ n ស្មើ s ។

482. ចូរបង្ហាញថា ៥០៤ ចែកដាច់ n^9-n^3 ។

483. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់សេស $n>0$ គេមាន n ចែកដាច់ $2^{n!}-1$ ។

484. តាង $p \nmid 10$ ជាចំនួនបឋមមួយ។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនដែលមានរាង $11...11$ ជាច្រើនរាប់មិនអស់
ដែល ចែកដាច់ នឹង p ។

485. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែលចែកដាច់

$$1^n + 2^n + ... + (n-1)^n$$

486. បើ $(m,n)=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$m^{\phi(n)} + n^{\phi(n)} \equiv 1 (\bmod mn)$$

487. ចូរកំនត់លេខ២ខ្ទង់ចុងគេរបស់ a_{1001} បើដឹងថា $a_1 = 7, a_n = 7^{a_{n-1}}$ ។

488. ចូរគណនា សំនល់របស់

$$10^{10} + 10^{10^2} + ... + 10^{10^{10}}$$

ពេលចែកនឹង៧។

489. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេមានចំនួនស្វ័យគុណ២ ដែលលេខ n ខ្ទង់ចុងគេ សុទ្ធតែជា
លេខ១និងលេខ២ទាំងអស់។

490. (**អាមេរិច ១៩៨២**) ចូរបង្ហាញថា គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ដែល $k.2^n + 1$ ជាចំនួនពហុគុណ
ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

491. (**អាមេរិច ១៩៨៤**) ចូរកំនត់ស្វ៊ីត $a_1 = 3, a_n = 3^{a_{n-1}} \bmod 100$ ចំពោះ n ធំខ្លាំង។

492. ចូរបង្ហាញថា

$$\phi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

493. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនពហុគុណ នោះ $\phi(n) \le n-\sqrt{n}$ ។ តើពេលណាគេមានសមភាព?។

494. (**អាមេរិច ១៩៩២**) ចូរគណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន ដែលតូចជាង១០ និង

មានភាគបែង ស្មើ៣0 ក្រោយសំរួលហើយ។ (ចំលើយ៖៤00)

495. ចូរបង្ហាញថា $\phi(n) \ge n.2^{-\omega(n)}$។

496. ចូរបង្ហាញថា $\phi(n) > \sqrt{n}$ ចំពោះ $n > 6$ ។

497. ចូរបង្ហាញថា បើ $\phi(n) | n$ នោះ n ត្រូវតែមានរាង $2^a 3^b$ ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន a,b។

498. ចូរបង្ហាញថា បើ $\phi(n) | n-1$ នោះ n ត្រូវតែជាចំនួនដែលចែកមិនដាច់នឹងគ្រប់ចំនួនការេ។

499. (ម៉ាឌ័ដែលប្រឺ ១៩៩៤) មនុស្សចំនួន៤00នាក់អង្គុយជុំវិញរង្វង់មួយ។ គេគូសចំនាំ មនុស្សម្នាក់ រួចរំលងមនុស្សចំនួនk នាក់ បន្ទាប់មកទៀត គូសចំនាំម្នាក់ទៀត រួចរំលងមនុស្សចំនួនk នាក់ បន្ទាប់មកទៀត ហើយចេះតែធ្វើយ៉ាងនេះដដែលៗ រហូតទាល់តែគូសបានមនុស្សដដែលម្នាក់ជាលើកទី២។ តើមានតំលៃវិជ្ជមាននៃk ខុសៗគ្នាចំនួនប៉ុន្មាន ដែលតូចជាង៤00 ដើម្បីអោយមនុស្សទាំងអស់នៅក្នុងរង្វង់នេះត្រូវបានគូសចំនាំយ៉ាងតិចម្តង?។

500. ចូរបង្ហាញថា បើ $\phi(n)|n-1$ និង n ជាចំនួនពហុគុណ នោះ n មានយ៉ាងតិចកត្តាបឋមពខុសគ្នា។

501. ចូរបង្ហាញថា បើ $\phi(n)|n-1$ និង n ជាចំនួនពហុគុណ នោះ n មានយ៉ាងតិចកត្តាបឋម៤។

502. ចំពោះ $n>1$ គេតាង $1=a_1<a_2<...<a_{\phi(n)}=n-1$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង n ដែល

បឋមនឹងn។ គេកំនត់អនុគមន៍មួយដូចតទៅ

$$g(n)=\max_{1\le k\le\phi(n)-1}\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

ចូរបង្ហាញថា $\omega(n)\le g(n)$។ (ណែនាំ៖ ប្រើទ្រឹស្តីបទចិន)

503. ចូរបង្ហាញថា លក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយn ជាចំនួនបឋមគឺ

$$\sigma(n)+\phi(n)=nd(n)$$

504. ប្រព័ន្ធរាប់គោល១០

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង

$$n = a_0 10^k + a_1 10^{k-1} + \ldots + a_{k-1} 10 + a_k$$

ដែល $1 \le a_0 \le 9, 0 \le a_j \le 9, j \ge 1$។ ឧទាហរណ៍

$$65789 = 6.10^4 + 5.10^3 + 7.10^2 + 8.10 + 9$$

505. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលផ្តើមដោយលេខ៦និង ថយចុះ២៥ដង បើសិនជាលេខ៦នេះត្រូវបានលុបចោល។

ចំលើយ

សន្មតថា ចំនួនទាំងនោះមាន $n+1$ ខ្ទង់។ ដូច្នេះចំនួននេះអាចសរសេរជា $6.10^n + y$ ដែល y ជាលេខមាន n ខ្ទង់(វាអាចផ្តើមដោយលេខសូន្យមួយរឺច្រើនជាងនេះ)។ តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$6.10^n + y = 25.y$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{6.10^n}{24}$$

$\Rightarrow \qquad n \ge 2$ (បើមិនអញ្ចឹង 6.10^n ចែកមិនដាច់នឹង 24)។ ចំពោះ $n \ge 2$ យើងមាន $y = 25.10^{n-2}$ មានន័យថា y មានរាង $250\ldots0$ (មានលេខសូន្យចំនួន $n-2$)។ យើងទាញបាន ចំនួនដែលត្រូវរកមានរាង $625\underbrace{0\ldots0}_{n-2}$ ។

506.(គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៦៨) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ផលគុណនៃតួលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់វា (នៅក្នុងគោលដប់) ស្មើនឹង $x^2-10x-22$ ។

ចំលើយ

សន្មតថា x មានរាង

$$x=a_0+a_1 10+a_2 10^2+...+a_{n-1}10^{n-1}, a_k\le 9, a_{n-1}\ne 0$$

តាង $P(x)$ ជាផលគុណតួលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់ x ដូច្នេះ

$$P(x)=x^2-10x-22$$

យើងមាន

$$P(x)=a_0a_1....a_{n-1}\le 9^{n-1}a_{n-1}\le 10^{n-1}a_{n-1}\le x$$

(វិសមភាពដាច់ខាតកើតមានពេលដែល x មានច្រើនជាងមួយខ្ទង់)។ ដូច្នេះ $x^2-10x-22<x$ យើងទាញបាន $x<13$ ។ បើ x មានលេខ១ខ្ទង់ នោះ $x=x^2-10x-22$ សមីការគ្មានរឹសជាចំនួនគត់។

បើ $x=10$ នោះ $10^2-10^2-22=-22\ne 1.0=0$

បើ $x=11$ នោះ $11^2-10.11-22=-11\ne 1.1=1$

បើ $x=12$ នោះ $12^2-10.12-22=2=1.2$ ។ ដូច្នេះ $x=12$ ។

507. ចំនួនគត់មួយថយចុះជាគត់ដង ពេលគេលុបតួលេខខាងចុងគេចោល។ ចូរគណនាចំនួនបែបនេះ។

ចំលើយ

តាង $0 \le y \le 9$ និង $10x + y = mx$ ដែល m និង x ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ ដូច្នេះ $10 + y / x = m$ ជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះ $x | y$ ។ បើ $y = 0$ នោះ គ្រប់ចំនួនគត់ x ចែកដាច់ y ។ បើ $y = 1$ នោះ $x = 1$ យើងទាញបាន 11 ។ បើ $y = 2$ នោះ $x = 1$ រឺ $x = 2$ យើងទាញបាន 12 និង 22 ។ តាមរបៀបដូចនេះ យើងទាញបាន ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ ជាពហុគុណនៃ
$10, 11, 12, 13, 14, 15,$
$16, 17, 18, 19, 22, 24, 26, 28, 33, 36, 39, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99$ ។

508. **តាង A ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង A' ជាចំនួនមួយដែលសរសេរដោយប្រើតួលេខនិងចំនួនខ្ទង់ដូច A តែតាមលំដាប់លំដោយមួយផ្សេងទៀត។ ចូរបង្ហាញថា បើ $A + A' = 10^{10}$ នោះ A ចែកដាច់នឹង១០។**

ចំលើយ

យើងឃើញថា A និង A' ត្រូវតែមានលេខ១០ខ្ទង់។ តាង $A = a_{10}a_9...a_1$ ជាតួលេខរបស់ A និង $A' = a'_{10}a'_9...a'_1$ ។ ដូច្នេះ $A + A' = 10^{10}$ លុះត្រាតែ មាន j មួយ ដែល $0 \le j \le 9$ ហើយដែល $a_1 + a'_1 = a_2 + a'_2 = ... = a_j + a'_j = 0,$
$a_{j+1} + a'_{j+1} = 10, a_{j+2} + a'_{j+2} = a_{j+3} + a'_{j+3} = ... = a_{10} + a'_{10} = 9$ ។ ក្នុងផលបូកលើ បើ $j = 0$ មានន័យថា គ្មានផលបូកដែលមានរាង $a_k + a_k{}' = 0, 1 \le k \le j$ ទេ។ បើ $j = 9$ នោះ មានតែ $a_{10} + a_{10}{}' = 10$ ។ ដោយបូក ផលបូកទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$a_1 + a'_1 + a_2 + a'_2 + ... + a_{10} + a'_{10} = 10 + 9(9 - j)$$

ដោយ a'_s ជាចំលាស់របស់ a_s នោះ យើងទាញបានថា អង្គខាងឆ្វេងរបស់សមភាពខាងលើ ជាចំនួនគូ គឺ $2(a_1+a_2+...+a_{10})$ ។ ដូច្នេះ j ត្រូវតែជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះ $a_1+a'_1=0$ ។ ដូច្នេះសំនើពិត។

509. (**អាមេរិច ១៩៩៤**) **គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តាង $p(n)$ ជាផលគុណនៃតួលេខខុសពីសូន្យរបស់ n ។ (បើ n មានតែមួយខ្ទង់ នោះ $p(n)$ ស្មើលេខមួយនោះ)។ តាង**

$$S = p(1)+p(2)+...+p(999)$$

ចូរកំនត់កត្តាបឋមធំបំផុតរបស់ S ។

ចំលើយ

យើងដឹងថា $p\left(\overline{a_1a_2...a_n}\right)=p\left(\overline{a_1}\right)p\left(\overline{a_2}\right)...p\left(\overline{a_n}\right)$ ដែល $p(0)=1$

យើងមាន

$$p(1)+p(2)+.....+p(9)=1+2+...+9=45=A$$

$$\left[p(10)+..+p(19)\right]+\left[p(20)+...+p(29)\right]+...+\left[p(90)+...+p(99)\right]=$$
$$=\left[p(1)+p(2)+...+p(9)\right](A+1)=A(A+1)$$
$$\Rightarrow \quad p(1)+...+p(99)=A^2+2A$$

$$\left[p(100)+...+p(199)\right]+\left[p(200)+...+p(299)\right]+...+\left[p(900)+...+p(999)\right]$$
$$=\left[p(1)+p(2)+...+p(9)\right]\left[p(00)+p(01)+...+p(99)\right]$$
$$=A\left(A^2+2A+1\right)=A(A+1)^2$$
$$\Rightarrow \ p(1)+p(2)+...+p(999)=A^2+2A+A(A+1)^2$$

$$= A\left(\left(A+1\right)^2+\left(A+1\right)+1\right)=45\left(2163\right)=\left(3^3\right)\left(5\right)\left(7\right)\left(103\right)$$

ដូច្នេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ១០៣។

510.(អាមេរិច ១៩៩២) តាង S ជាសំនុំនៃគ្រប់ចំនួនសនិទាន r, ដែល $0<r<1$ ហើយដែលមានតួលេខជាខួបរាង

$$0.abcabcabcabc....=0.\overline{abc}$$

ដែលតួលេខ a,b,c មិនចាំខុសគ្នាក៏បាន។ បើប្រភាគនិមួយៗដែលជាធាតុរបស់ S សំរួលរួចហើយ តើមានភាគយកខុសៗចំនួនប៉ុន្មាន?។

ចំលើយ

យើងឃើញថា $0.\overline{abc}=\dfrac{abc}{999}$ និង $999=3^3.37$ ។ បើ abc ចែកមិនដាច់នឹង៣ហើយនិងនឹង ៣៧ នោះប្រភាគត្រូវបានសំរួលរួចហើយ។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 មានចំនួន 333 ។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 37 មានចំនួន ២៧។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 ផងនិង 7 មានចំនួន $\dfrac{999}{3\left(37\right)}=9$ ។ ដូច្នេះ ចំនួនដែលមិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 និង 7 មានចំនួន $999-\left(333+27\right)+9=648$ ។

ប្រភាគមានរាង $\dfrac{s}{37}$ ដែល $3\mid s$ និង $37\nmid s$ ស្ថិតនៅក្នុងសំនុំ S ។គេមានប្រភាគបែបនេះចំនួន១២បែប។(គួរសំគាល់ថា យើងមិនយកប្រភាគមានរាង $\dfrac{l}{3^3}$ ដែល $37\mid l$ និង $3\nmid l$ ទេ ព្រោះប្រភាគអស់នេះ ធំជាង១ ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ S)។ ដូច្នេះចំនួនភាគយកខុសៗសរុប នៅក្នុងសំនុំនេះក្រោយសំរួលរួច មានចំនួន $640+12=660$ ។

511. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន មានពហុគុណរបស់វាមួយ ដែល លេខរបស់វាក្នុងគោល១០ មានគ្រប់តួលេខពី០ដល់៩។

ចំលើយ

តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលមានk ខ្ទង់។ តាង $m=123456789.10^{k+1}$ ។ ដូច្នេះគ្រប់ n ចំនួនគត់តគ្នា $m+1,m+2,...,m+n$ ដែលចាប់ផ្តើមដោយលេខ១១២៣៤៥៦៧៨៩០ និងមានមួយក្នុងចំនោមនោះចែកដាច់នឹងn ។ ដូច្នេះ ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ n ហើយមានគ្រប់តួលេខពី០ដល់ ៩។

512. លេខ

$$123456789101112131415161718192021 22...$$

ទទួលបានដោយរៀបចំនួនគត់តរៀងគ្នាបន្តបន្ទាប់គ្នា។ យើងតាង $f(n)=m$ ជាអនុគមន៍ដែលខ្ទង់ទី10^n របស់លេខនេះ ស្ថិតនៅចំចំនុចដែលគេបន្ថែមលេខមានm ខ្ទង់។ ឧទាហរណ៏ $f(2)=2$ ព្រោះ ខ្ទង់ទី$100=10^2$ ស្ថិតនៅចំលេខ៥៥ ដែលមាន២ខ្ទង់។ ចូរគណនាដោយស្រាយបញ្ជាក់ $f(1987)$។

ចំលើយ

គេមាន ចំនួនគត់វិជ្ជមាន មាន j ខ្ទង់ចំនួន 9.10^{j-1} នៅលេខនេះ។ ចំនួនខ្ទង់សរុបរបស់លេខនេះពេលគេយកត្រឹមលេខមាន r ខ្ទង់យ៉ាងច្រើនមករៀប កំនត់ដោយ

$g(r)=\sum_{j=1}^{r} j.9.10^{r-1}=r.10^r-\frac{10^r-1}{9}$ ។ ដោយ $0<\frac{10^r-1}{9}<10^r$ យើងទាញបាន

$(r-1)10^r<g(r)<r.10^r$ ។ ដូច្នេះ

$g(1983) < 1983.10^{1983} < 10^4.10^{1983} = 10^{1987}$ និង

$g(1984) > 1983.10^{1984} > 10^3.10^{1984}$ ។ ដូច្នេះ

$g(1983) < 10^{1987} < g(1984)$ មានន័យថា ចំនួនខ្ទង់របស់លេខនេះបង្កើតដោយប្រើត្រឹមលេខមាន 1983 ខ្ទង់ តូចជាង 10^{1987} ហើយ ដោយប្រើត្រឹមលេខមាន 1984 ខ្ទង់ ធំជាង 10^{1987} ។ ដូច្នេះ ទីតាំងខ្ទង់ទី 10^{1987} ស្ថិតនៅត្រឹមយកលេខមាន1984 ខ្ទង់មកប្រើ ដូច្នេះ $f(1987) = 1984$ ។

513. ចូរបង្ហាញថាគ្មានចំនួនណាមួយដែល ថយចុះ៣៥ដងពេលគេលុបលេខខ្ទង់ទី១របស់វាទេ។

514. ចំនួនមួយស្មើមធ្យមពីជគណិត នៃគ្រប់ចំនួនទាំងអស់បានមកពី គ្រប់ចំលាស់ដែលអាចមាននៃ តួលេខរបស់ចំនួនដែលគេអោយមួយ។ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលមានលក្ខណៈបែបនេះ។

515. (**អាមេរិច ១៩៨៩**) សន្មតថា n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង d ជាចំនួនមានលេខមួយខ្ទង់នៅក្នុងគោល១០។ ចូរគណនា n បើ

$$\frac{n}{810} = 0.d25d25d25d25...$$

516. (**អាមេរិច ១៩៩២**) តើមានចំនួនគត់តរៀងគ្នា ប៉ុន្មានគូនៅក្នុង

$$\{1000, 1001, ..., 2000\}$$

ដែលមិនមានត្រាទុកពេលបូកចំនួនពីរនេះចូលគ្នា?។

517. តាង M ជាចំនួនមួយមានលេខ១៧ខ្ទង់ និង តាង N ជាចំនួនមួយ បាន មកពី M ដោយសរសេរតួលេខរបស់ M តាមលំដាប់បញ្ច្រាសមកវិញ។ ចូរបង្ហាញថា មានយ៉ាងហោចណាស់តួលេខមួយ របស់ $M+N$ នៅក្នុងគោល១០ ជាចំនួនគូ។

518. គេអោយ

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

ចូរបង្ហាញថា e ជាចំនួនអសនិទាន។

519. តាង t ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មួយ ដែល nt នៅក្នុងគោល១០ មានលេខ៧មួយ។

520. (**អាមេរិច ១៩៨៨**)ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត ដែលគូបរបស់វាបញ្ចប់ដោយ ៨៨៨។

521. (**អាមេរិច ១៩៨៧**)ទ្វេធាតុ(m,n)នៃចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានមួយ ហៅថាសាមញ្ញ បើ ផលបូក $m+n$គ្មានត្រាទុក។ ចូរគណនា ចំនួនទ្វេធាតុ តាមលំដាប់សាមញ្ញនៃចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ដែលមានផលបូក១៤៩២។

522. (**អាមេរិច ១៩៨៦**)នៅក្នុងល្បែងមួយ អ្នកលេងសៀក បានសួរទៅទស្សនិកជនម្នាក់អោយ គិតពីលេខ១ មាន៣ខ្ទង់ តាងដោយ abc។ អ្នកលេងសៀកអោយ ទស្សនិកជនម្នាក់នោះ បង្កើតជាលេខ acb, bac, cab និង cba រួចបូកចូលគ្នា ជាមួយចំនួនដើម រួចប្រាប់ផលបូកទទួលបាន តាងដោយ N។ បើ គេប្រាប់តំលៃរបស់ N នោះ អ្នកលេងសៀកអាចទាយលេខ abc បាន។ ឥលូវអ្នកធ្វើជាអ្នកលេងសៀកម្តង។ ចូរកំនត់ abc បើ ដឹងថា $N=319$។

523. ចំនួនគត់ n ជាពហុគុណតូចបំផុតនៃ ១៥ ដែល គ្រប់តួលេខរបស់ n ជាលេខ 0 រឺលេខ ៨។ ចូរគណនា $n/15$។

524. (អាមេរិច ១៩៨៨)ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ណាមួយ តាង $f_1(k)$ ជាការេនៃផលបូករបស់តួលេខរបស់ k។ ចំពោះ $n \geq 2$, តាង $f_n(k) = f_1\left(f_{n-1}(k)\right)$។ ចូរគណនា $f_{1988}(11)$។

525. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៦៩) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនមានលេខ៣ខ្ទង់ N ដែលចែកដាច់នឹង១១ និង ដែល $N/11$ ស្មើនឹងផលបូក របស់ការេនៃតួលេខខ្ទង់និមួយៗរបស់ N។

526. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៦២)ចូរកំនត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត ដែលតួលេខខាងចុងស្មើ៦ និង បើ លេខ៦នេះ ត្រូវដកយកទៅដាក់នៅពីមុខគេវិញ នោះ ចំនួនទទួលបាន មានតំលៃ៤ដងធំជាង ចំនួនដើម។

527. ១) ចូរបង្ហាញថា

$$\chi = 0.123456789101112131415161718192021...$$

ជាចំនួនអសនិទាន។

២) តាង $r \in \mathbb{Q}$ និង តាង $\varepsilon > 0$ ជាចំនួនដែលគេអោយ។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល

$$\left|10^n \chi - r\right| < \varepsilon$$

528. ចំនួន**លីអូវីល**ជាចំនួនពិត x មួយ ដែល គ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន k គេមានចំនួនគត់ a និង $b \geq 2$ ដែល

$$\left|x-a/b\right|<b^{-k}$$

ចូរបង្ហាញថារឹបដិសេធថា π ជាផលបូកនៃ២ចំនួន**លីអូវីល**។

529. គេអោយ

$$\frac{1}{49}=0.0204081632653061224489795918367346938775 51$$

ចូរកំនត់លេខ១000ខ្ទង់ចុងគេរបស់

$$1+50+50^2+...+50^{999}$$

530. ចូរសរសេរ ៥២១៣ នៅក្នុងគោល ៧។

ចំលើយ

យើងឃើញថា $5213<7^5$ ។ ដូច្នេះ យើងគណនា $0\le a_0,...,a_4\le 6, a_4\ne 0$ ដែល

$5213=a_4 7^4+a_3 7^3+a_2 7^2+a_1 7+a_0$ ។ យើងមាន

$5213=2.7^4+411;\ 411=1.7^3+68;\ 68=1.7^2+19;\ 19=2.7^1+5.7^0$ ។

ដូច្នេះ $5213=2.7^4+1.7^3+1.7^2+2.7^1+5.7^0$ ។ ដូច្នេះ $5213=21125_7$ ។

531. ចូរសរសេរចំនួនទសភាគ $13/16$ នៅក្នុងគោល៦។

ចំលើយ

សរសេរ

$$\frac{13}{16}=\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6^2}+\frac{a_3}{6^3}+\ldots$$

គុណ $13/16$ នឹង៦ យើងទាញបាន $\frac{13}{16}6=4+\frac{14}{16}$ ។ ដូច្នេះ $\frac{13}{16}=\frac{4}{6}+\frac{14}{96}$

ដូច្នេះ $a_1=4$ ។គុណ $\frac{14}{96}$ នឹង 6^2 យើងទាញបាន $\frac{14}{96}6^2=5+\frac{1}{4}$; ដូច្នេះ

$\frac{14}{96}=\frac{5}{6^2}+\frac{1}{144}$; ដូច្នេះ $a_2=5$ ។ តាមរបៀបដដែល យើងទាញបាន

$13/16=0.4513_6$ ។

532. ចូរបង្ហាញថា 4.41 ជាការេនៃចំនួនសនិទាន នៅក្នុងគ្រប់ប្រព័ន្ធរាប់ទាំងអស់។

ចំលើយ

4.41 នៅក្នុងគោល r កំនត់ដោយ

$$4.41=4+\frac{4}{r}+\frac{1}{r^2}=\left(2+\frac{1}{r}\right)^2$$

533. តាង $[x]$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ។ តើសមីការ

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

មានរឹសរឺទេ?។

ចំលើយ

យើងនឹងបង្ហាញថា សមីការនេះគ្មានរឹសទេ។ យើងដឹងថា $x-1<[x]\le x$ ។ ដូច្នេះ

$$x-1+2x-1+4x-1+\ldots+32x-1<[x]+[2x]+$$

$$[4x]+[8x]+[16x]+[32x]\le x+2x+4x+\ldots+32x$$

យើងទាញបាន $63x-6<12345\le 63x$ ។ ដូច្នេះ $195<x<196$ ។

យើងសរសេរ x នៅក្នុងគោល២

$$x=195+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\dots$$ ដោយ $a_k=0$ រឺ 1 ។ ដូច្នេះ

$$[2x]=2.195+a_1$$

$$[4x]=4.195+2a_1+a_2$$

$$[8x]=8.195+4a_1+2a_2+a_3$$

$$[16x]=16.195+8a_1+4a_2+2a_3+a_4$$

$$[32x]=32.195+16a_1+8a_2+4a_3+2a_4+a_5$$

បូកសមភាពទាំងអស់នេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=63.195+$$

$31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5=12345$

ដូច្នេះ $31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5=60$ ។ សមីការនេះមិនអាចមានចំលើយទេព្រោះ

$31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5\le 31+15+7+3+1=57<60$ ។

534. (**អាមេរិច ១៩៩៣**) **គេអោយ** $0\le x_0<1$ ។ **តាង**

$x_n=2x_{n-1}$ **បើ** $2x_{n-1}<1$

$x_n=2x_{n-1}-1$ **បើ** $2x_{n-1}\ge 1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n>0$ ។ **តើមាន** x_0 **ចំនួនប៉ុន្មានដែល** $x_0=x_5$ **?**។

ចំលើយ

យើងសរសេរ x_0 នៅក្នុងគោល២

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$$ ដែល $a_n=0$ រឺ 1។

យើងសង្កេតឃើញថា នៅក្នុងរបៀបគណនា x_n ខាងលើ គឺគេគ្រាន់តែលុបតួលេខក្រោយក្បៀសមុខគេ របស់ x_{n-1} សរសេរក្នុងគោល២ មួយខ្ទង់ចោលប៉ុណ្ណោះ។ ដើម្បីអោយ x_0 ស្មើ x_5 យើងត្រូវអោយ $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7...$

$=0.a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}...$ ។ វាអាចតែក្នុងករណី x_0 មានប្លុក $a_1a_2a_3a_4a_5$ ជាខួប។ គេមានប្លុកបែបនេះ ចំនួន $2^5=32$ ។ តែបើ $a_1=a_2=...=a_5=1$ នោះ $x_0=1$ ដែលស្ថិតនៅក្រៅ $[0,1)$ ។ ដូច្នេះចំនួនតំលៃផ្សេងគ្នានៃ x_0 ដែល $x_0=x_5$ គឺ $32-1=31$ ។

535.(**អាមេរិច ១៩៨៦**) ស៊្វីតកើន

$$1,3,4,9,10,12,13,...$$

មានគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល ជាស្វ័យគុណនៃ៣ រឺជាផលបូកនៃស្វ័យគុណនៃ៣ ផ្សេងគ្នា។ ចូរគណនា

តួទី១០០នៃស៊្វីតនេះ។

ចំលើយ

តួនៃស៊្វីតនេះអាចសរសេរជា

$1,3,4,9,10,12,13,...$	**គោល១០**	(១)
$1,10,11,100,101,110,111,...$	**គោល៣**	(២)
$1,10,11,100,101,110,111,...$	**ក្នុងគោល២ ត្រូវនឹង**	(៣)
$1,2,3,4,5,6,7,...$	**គោល១០**	(៤)

ដូច្នេះតួទី១០០នៃស៊្វីតនេះ ជាលេខ១០០ក្នុង(៤)។ យើងទាញរក តំលៃត្រូវគ្នានៃ១០០ នេះ ក្នុងទំនាក់ទំនងទី(៣)។ យើងសរសេរ១០០ នៅក្នុងគោល២គឺ $100=1100100_2$

ហើយបំលែងវាទៅជាគោល៣ គឺ $1100100_3 = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$ ។ ដូច្នេះតួទី១០០ របស់ស្វ៊ីតស្មើនឹង 981 ។

536. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ គេមាន

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[2^n x\right]}}{2^n} = 1 - 2\left(x - [x]\right)$$

537. $E(n)$ ជាតំលៃ k ធំបំផុត ដែល 5^k ជាតួចែករបស់ $1^1 2^2 3^3 \ldots n^n$ ។ ចូរគណនា

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(n)}{n^2}$$

538. (**អាមេរិច ១៩៨២**)ចំនួនការេមួយ កំនត់ដោយ $ab3c$ ដោយ $a \neq 0$ នៅក្នុងគោល ៨។ ចូរគណនាតំលៃរបស់ c ។

539. តាង C ជាសំនុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលពេលសរសេរនៅក្នុងគោល៣ មិនត្រូវការលេខ២។ ចូរបង្ហាញថា គ្មានត្រីធាតុនៃ C ដែលជាស្វ៊ីតនព្វន្តទេ។

540. តាង $B(n)$ ជាចំនួនលេខ១ នៅក្នុងគោល២របស់ n ។ ឧទាហរណ៍ $B(6) = B(110_2) = 2,\ B(15) = B(1111_2) = 4$ ។

១) តើ $e^{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)}{n^2+n}\right)}$ ជាចំនួនសនិទានរឺទេ?។

២) ចូរសរសេរ $\sum_{n=0}^{2^m-1}(-1)^{B(n)}n^m$ ជារាង $(-1)^m a^{f(m)}\left(g(m)\right)!$ ដែល a ជាចំនួនគត់ និង f,g ជាពហុធា។

541. ទ្រឹស្តីបទឡឺសង់

តាង p ជាចំនួនបឋម និងតាង

$$n=a_0p^k+a_1p^{k-1}+\ldots+a_{k-1}p+a_k$$

ជាពន្លាតរបស់ n ក្នុងគោល p ។ ចំនួនគត់ m ធំបំផុតដែល p^m ចែកដាច់ $n!$ កំនត់ដោយ

$$m=\frac{n-\left(a_0+a_1+\ldots+a_k\right)}{p-1}$$

សំរាយបញ្ជាក់

តាមទ្រឹស្តីបទ**ឌឺប៉ូលីញ៉ាក់**

$$m=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

យើងមាន

$$\left[\frac{n}{p}\right]=a_0p^{k-1}+a_1p^{k-2}+\ldots+a_{k-2}p+a_{k-1};$$

$$\left[\frac{n}{p^2}\right]=a_0p^{k-2}+a_1p^{k-3}+\ldots+a_{k-2};$$

…….

$$\left[\frac{n}{p^k}\right] = a_0$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right] = a_0\left(1+p+p^2+...+p^{k-1}\right)+$$
$$a_1\left(1+p+p^2+...+p^{k-2}\right)+...+a_{k-1}\left(1+p\right)+a_k$$
$$= a_0\,\frac{p^k-1}{p-1}+a_1\,\frac{p^{k-1}-1}{p-1}+...+a_{k-1}\,\frac{p^2-1}{p-1}+a_k\,\frac{p-1}{p-1}$$
$$= \frac{a_0p^k+a_1p^{k-1}+...+a_k-\left(a_0+a_1+...+a_k\right)}{p-1}$$
$$= \frac{n-\left(a_0+a_1+...+a_k\right)}{p-1}$$

542. ទ្រឹស្តីបទខាំម័រ

តាង p ជាចំនួនបឋម។ ចំនួនគត់ m ធំបំផុតដែល p^m ចែកដាច់មេគុណទ្វេធា $\begin{pmatrix}a+b\\a\end{pmatrix}$ ស្មើនឹងផលបូកចំនួនត្រាទុកក្នុងប្រមាណវិធីបូករបស់ a និង b សរសេរក្នុងគោល p ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាង $a = a_0+a_1p+...+a_kp^k$, $b = b_0+b_1p+...+b_kp^k$, ដែល

$0 \le a_j, b_j \le p-1$ និង $a_k+b_k > 0$ ។ តាង $S_a = \sum_{j=0}^{k} a_j;\ S_b = \sum_{j=0}^{k} b_j$ ។ កំនត់យក c_j

ដែល $0 \le c_j \le p-1$ និង $\varepsilon_j = 0$ រឺ 1 កំនត់ដោយ

$$a_0 + b_0 = \varepsilon_0 p + c_0$$

$$\varepsilon_0 + a_1 + b_1 = \varepsilon_1 p + c_1$$

$$\varepsilon_1 + a_2 + b_2 = \varepsilon_2 p + c_2$$

.....

$$\varepsilon_{k-1} + a_k + b_k = \varepsilon_k p + c_k \qquad (*)$$

ផលបូកនៃចំនួនត្រាទុកកំនត់ដោយ $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k$ ។

គុណសមភាពទាំងអស់នេះបន្តបន្ទាប់គ្នានឹង $1, p, p^2, ...$ រួចបូកអង្គនិងអង្គ យើងទាញបាន

$$a + b + \varepsilon_0 p + \varepsilon_1 p^2 + ... + \varepsilon_{k-1} p^k =$$

$$\varepsilon_0 p + \varepsilon_1 p^2 + ... + \varepsilon_{k-1} p^k + \varepsilon_k p^{k+1} + c_0 + c_1 p + ... + c_k p^k$$

យើងទាញបាន $a + b = c_0 + c_1 p + ... + c_k p^k + \varepsilon_k p^{k+1}$ ។ ដូច្នេះ $S_{a+b} = \varepsilon_k + \sum_{j=0}^{k} c_j$;

ដោយបូកសមភាព(*)បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$S_a + S_b + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_{k-1}) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k) p + (c_0 + c_1 + ... + c_k)$$

$$= (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k) p + S_{a+b} - \varepsilon_k$$

តាមទ្រឹស្តីបទ**ឡឺសង់**

$$(p-1)m = (a+b) - S_{a+b} - (a - S_a) - (b - S_b)$$

$$= (p-1)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k)$$

ដូច្នេះ $\quad m = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k$ ។

543. សមីការឌីយ៉ូផង់

យើងហៅសមីការមួយថា ជាសមីការ**ដ្យូផង់** បើចំលើយរបស់សមីការដែលយើងចង់បាន ជាចំនួនគត់។ ឧទាហរណ៏ $x^2 = 4k+3,\ \ x^2+y^2=z^2, 1!+2!+...+n!=x^2$ សុទ្ធតែជាសមីការ **ដ្យូផង់**។
អាឡិចសង់ ដ្យូផង់ ជាគណិតវិទូក្រិច ក្នុងអំលុងឆ្នាំ ២០០នៃគ្រិស្តសករាជ។

យើងឃើញថា ជាទូទៅសមីការ**ដ្យូផង់** មានអញ្ញាតច្រើន។ វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយនោះក៏ប្លែកខុសៗគ្នា មានច្រើនបែប ខុសពីសមីការពីជគណិតធម្មតា។
ការដោះស្រាយសមីការនេះជាទូទៅមានការលំបាកខ្លាំង ហើយគ្មានវិធីសាស្ត្រទូទៅណាមួយឡើយ។

លក្ខណះរបស់ចំនួនគត់និងភាពចែកដាច់ជាគន្លឹះសំខាន់នៅក្នុងការដោះស្រាយសមីការ **ដ្យូផង់**។
– បើផលគុណ ab ជាស្វ័យគុណនៃចំនួនបឋម p នោះ a និង b ក៏ជាស្វ័យគុណនៃចំនួនបឋមនេះដែរ។ បើ ផលគុណ ab ជាស្វ័យគុណនៃចំនួនគត់ n នោះយើងគួរបំបែក n ជាផលគុណកត្តាបឋម។
– បើផលគុណ ab ជាការេ ហើយ a និង b បឋមនឹងគ្នា នោះ a និង b សុទ្ធតែជាចំនួនការេ។ ជាទូទៅ បើ $d = PGCD(a,b)$ នោះ a អាចសរសេរជា $d.x^2$ និង b អាចសរសេរជា $d.y^2$ ចំពោះចំនួនគត់ x, y។ យើងដឹងថា $PGCD$ នៃ២ចំនួនគត់ដែលមានផលសងស្មើ n ជាតួចែករបស់ n។ ជាពិសេស លក្ខណះនេះមានសារះសំខាន់សំរាប់ករណីសមីការមានផលគុណ $a(a+n)$ រឺជាទូទៅ $(a-n)(a+n)=a^2-n^2$។

– ចំនួនគត់វិជ្ជមានមានតំលៃធំជាងរឺស្មើ១។ ដូចគ្នា បើ n ជាចំនួនគត់ និង $n \le x$ នោះ $n \le [x]$។ គន្លឹះនេះគឺមានន័យថា យើងមិនត្រូវរក្សាទុកវិសមភាពដាច់ខាតរវាងចំនួនគត់ពីរទេ វាត្រូវតែមានវិធីកែតំរូវ។

– $$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right)$$

– បើ n សេស

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right)$$

ការបំបែកជាកត្តាផលគុណទាំងនេះ មានសារៈសំខាន់ខ្លាំងណាស់ ពេលយើងចង់កែសំរួលរូបភាពរបស់សមីការមួយ។ គួរកត់សំគាល់ថា គ្រប់កន្សោមដែលមានរាង $\alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta$ សុទ្ធតែអាចបំបែកជារាង

$$(ax+b)(cx+d)+e$$

បានទាំងអស់ ដោយ a,b,c,d,e ជាចំនួនសនិទាន។

544. ដោះស្រាយសមីការ

$$2^n + 1 = x^2$$

ចំលើយ

សមីការសមមូលនឹង

$$2^n = (x+1)(x-1)$$

ដូច្នេះ $(x+1)$ និង $(x-1)$ ត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ២ទាំង២។ យើងដឹងថាចំនួនស្វ័យគុណនៃ២ដែលខុសគ្នាចំនួន២ឯកតា មានតែ២និង៤ប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ $x=3$ ជាចំលើយតែមួយគត់ ហើយ $n=3$ ។

545. ក) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ២ចំនួនគត់តគ្នាមិនអាចជាចំនួនគត់ការេទេ។

ខ) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ៣ចំនួនគត់តគ្នាមិនអាចជាចំនួនគត់ការេទេ។

គ) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ៤ចំនួនគត់តគ្នាមិនអាចជាចំនួនគត់ការេទេ។

ចំលើយ

ក) សន្មតថា $n(n+1)$ ជាចំនួនការេ។ ដោយ n និង$n+1$ បឋមនឹងគ្នា នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំង២។ តែមិនដែលមានចំនួនការេ២ខុសគ្នាមួយឯកតាទេ លើកលែងតែ១និង0 $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...\ b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) > 1)$។

ខ) សន្មតថា $(n-1)n(n+1)$ ជាចំនួនការេ។ ដោយ n និង $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ បឋមនឹងគ្នា នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំង២។ តែដើម្បីអោយ $n^2 - 1$ ជាការេនៃចំនួនគត់ ទាល់តែ $n = \pm 1$ (ព្រោះ $n^2 - 1 = b^2;\ 1 = (n-b)(n+b) \geq 1$) តែពេលនោះ ផលគុណ $(n-1)n(n+1)$ ស្មើសូន្យ។

គ) $(n-1)n(n+1)(n+2) = \left(n^2 + n - 1\right)^2 - 1$ អាចជាចំនួនការេ មានតែ $n^2 + n - 1 = \pm 1$ រឺ ផលគុណនោះស្មើសូន្យ។

546. ដោះស្រាយសមីការ

$$x^2 = 2 + 6y^2 + y^4$$

ចំលើយ

សមីការនេះអាចសរសេរទៅជា

$$x^2 = \left(y^2 + 3\right)^2 - 7$$

$$x=\left(y^2+3\right)\sqrt{1-\frac{7}{\left(y^2+3\right)^2}}<y^2+3$$

ជាមួយគ្នានេះដែរ យើងមាន

$$x^2=\left(y^2+2\right)^2+2y^2-2$$

ដូច្នេះ បើ $2y^2-2>0$ នោះ យើងទាញបាន $x>y^2+2$ ។ ដូច្នេះ $y^2+2<x<y^2+3$ ។ សមីការគ្មានរឹស។

ដូច្នេះទាល់តែ $2y^2-2\le 0$ មានន័យថា $y=-1,0,1$ ។ ករណី $y=\pm 1$ យើងទាញបាន $x=\pm 3$ ។ ករណី $y=0$ x មិនមែនជាចំនួនគត់។

547. ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $3n+7$ ចែកដាច់ $5n+13$ ។

ចំលើយ

យើងឃើញថា ផលធៀប $\dfrac{5n+13}{3n+7}$ ស្ថិតនៅចន្លោះ 0 និង២ដាច់ខាត ដោយវាជាចំនួនគត់ នោះវាត្រូវតែស្មើ១។ ដូច្នេះ យើងត្រូវតែដោះស្រាយសមីការ $5n+13=3n+7$ យើងទាញបាន $n=-3$ ។ ចំនួននេះមិនមែនជាចំនួនវិជ្ជមានទេ ដូច្នេះ គ្មានចំនួនគត់ n ទេ។

548. ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y,z ដែល

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

ចំលើយ

ដោយ x, y, z មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីនឹងគ្នា នោះយើងអាចសន្មតថា $0 < x \le y \le z$ ។ តាមលក្ខខណ្ឌនេះ យើងមាន

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{x}$$

ដូច្នេះ $x \le 3$ ។ ដូច្នេះ $x = 1; 2; 3$ ។

បើ $x = 1$ នោះ $1/y + 1/z = 0$ មិនអាចព្រោះ $y, z > 0$ ។

បើ $x = 2$ នោះ $1/y + 1/z = 1/2$ ។ ដោយ $y \le z$ នោះ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y \le 4$$

ដោយ $x = 2$ ដូច្នេះ $2 = x \le y \le 4$ ។ ដូច្នេះ $y = 2; 3; 4$ ។ $y = 2$ មិនអាចមាន z ។ បើ $y = 3$ នោះ $z = 6$ ។ បើ $y = 4$ នោះ $z = 4$ ។

បើ $x = 3$ នោះ

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{2}{y}$$

$\Rightarrow y \le 3 \quad \Rightarrow 3 = x \le y \le 3$ ដូច្នេះ មានតែ $y = 3$ ។ ដូច្នេះ $z = 3$ ។

ដូច្នេះជាសរុបចំលើយរបស់សមីការមាន $(2,3,6);(2,4,4);(3,3,3)$ និងគ្រប់តំរៀបទាំងអស់ដែលអាចមាននៃត្រីធាតុទាំងអស់នេះ($(2,6,3),(3,2,6),....$)។

549. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ x ដែល $x^2 - x + 2$ ជាចំនួនការេ។

ចំលើយ

បើ $x < 0$ នោះ $x^2 - x + 2 > x^2 + 2$ និង $x^2 - x + 2 < x^2 - 2x + 2$

ដូច្នេះ $x^2 < x^2 - x + 2 < (x-1)^2 + 1$

ដូច្នេះ $x^2 < x^2 - x + 2 \le (x-1)^2$

តាង $u = -x > 0$ នោះ $u^2 < u^2 + u + 2 \le (u+1)^2$

$u^2 + u + 2$ ជាការេនៃចំនួនគត់ស្ថិតនៅចន្លោះការេនៃចំនួនគត់២តគ្នា ដូច្នេះ មានតែ $u^2 + u + 2 = (u+1)^2$ រឺក៏ $u = 1$ ។ ដូច្នេះ $x = -1$ ដូច្នេះ $x^2 - x + 2 = 1 + 1 + 2 = 4 = 2^2$ ។

បើ $x = 1$ នោះ $x^2 - x + 2 = 2$ មិនមែនជាចំនួនការេ។

បើ $x = 2$ នោះ $x^2 - x + 2 = 4 = 2^2$ ជាចំនួនការេ។

បើ $x > 2$ នោះ $x^2 - x + 2 = x^2 - (x-2) > x^2$

និង $x^2 - x + 2 < x^2 + 2$

ដូច្នេះ $x^2 < x^2 - x + 2 < x^2 + 2$ រឺក៏ $x^2 + 1 \le x^2 - x + 2 \le x^2 + 1$

ដូច្នេះ $x^2 + 1 = x^2 - x + 2$ ដូច្នេះ $x = 1 < 2$ ។

ដូច្នេះ $x = -1; x = 2$ ដែល $x^2 - x + 2$ ជាចំនួនការេ។

សំគាល់៖សំនួរនេះអាចសរសេរជា ដោះស្រាយសមីការ $x^2 - x + 2 = y^2$ ។

550. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ x ដែល $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ ជាចំនួនការេ។

ចំលើយ

ចំពោះ $x \ne 0$ យើងមាន

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 < 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 < \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2$$

បើ x ជាចំនួនគូ នោះ តួកណ្ដាលស្ថិតនៅចន្លោះចំនួនការេពីរតគ្នា ដូច្នេះវាមិនអាចជាចំនួនការេ

បានទេ។ បើ x ជាចំនួនសេស នោះចន្លោះ $x^2+\frac{x}{2}$ និង $x^2+\frac{x}{2}+1$ មានតែចំនួនគត់

$x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ មួយគត់ ដូច្នេះត្រូវតែ

$$\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=1+x+x^2+x^3+x^4$$

ដូច្នេះ $x^2-2x-3=0$ មានចំលើយ $x=1$ និង $x=-3$ ។

ដូច្នេះ ចំលើយគឺ $x=0, x=1, x=-3$ ។

551. (ហុងគ្រី ១៩៩៧) ចូរកំនត់ចំលើយជាចំនួនគត់នៃសមីការ

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+\ldots+(x+7)^3=y^3$$

ចំលើយ

តាង $P(x)=x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+\ldots+(x+7)^3$

$=8x^3+84x^2+420x+784$ ។

បើ $x\geq 0$ នោះ

$$\begin{aligned}(2x+7)^3 &= 8x^3+84x^2+294x+343\\ &< P(x) < 8x^3+120x^2+600x+1000=(2x+10)^3\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $2x+7<y<2x+10$ ដូច្នេះ $y=2x+8$ រឺ $2x+9$ ។សមីការ

$$P(x)-(2x+8)^3=-12x^2+36x+272=0$$

$$P(x)-(2x+9)^3=-24x^2-66x+55=0$$

គ្មានចំលើយជាចំនួនគត់ទាំង២។ ដូច្នេះ $x\geq 0$ សមីការគ្មានចំលើយ។

យើងមាន $P(-x-7)=-P(x)$ ដូច្នេះ (x,y) ជាចំលើយ លុះត្រាតែ $(-x-7,-y)$ ជាចំលើយដែរ។ តែសមីការគ្មានចំលើយចំពោះ $-x-7\geq 0$ រឺ $x\leq -7$ ទេ។ ដូច្នេះ បណ្តាចំលើយ (x,y) ត្រូវតែ $-6\leq x\leq -1$ ។

យើងមាន $P(-1)=440$ មិនមែនជាចំនួនគូប។ $P(-2)=216=6^3$ និង $P(-3)=64=4^3$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានចំលើ $(x=-2,y=6)$ និង $(x=-3,y=4)$ ។ ហើយគូចំលើយផ្សេងទៀតគឺ $(x=2-7=-5,y=-6)$ និង $(x=3-7=-4,y=-4)$ ។

552. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ x,y ដែល

$$x^2=y^5-4$$

ចំលើយ

យើងមាន $y^5\equiv 0,1,-1(\mathrm{mod}11)$ ចំពោះគ្រប់ y ។ ដូច្នេះ $y^5\equiv 7,8,6(\mathrm{mod}11)$ ចំពោះគ្រប់ y ។

តែ យើងមាន $x^2\equiv 0,1,4,9,5,3(\mathrm{mod}11)$ ចំពោះគ្រប់ x ។ ដូច្នេះសមីការនេះគ្មានរឺស។

553. ក) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n=a^2$ ។

ខ) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n=a^2-1$ ។

គ) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n=a^2-2$ ។

ចំលើយ

ក) $5^n=a^2\Rightarrow a$ ត្រូវតែជាចំនួនស្វ័យគុណនៃ៥ ដូច្នេះ $a=5^k$ ។ សមីការទៅជា $2k=n$ ដូច្នេះ n ជាចំនួនគូ។ ដូច្នេះ n ជាចំនួនគូ ហើយ $a=2^{n/2}$ ។

ខ) $5^n = (a-1)(a+1)$ ។ ដោយ $a-1$ បឋមនឹង $a+1$ បើ $a \neq 2$ នោះ $a-1$ និង $a+1$ ត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ៥ទាំង២។ តែមិនដែលមានស្វ័យគុណនៃ៥ដែលខុសគ្នាចំនួន២ទេ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

គ) ដោយពិនិត្យលើភាពសមមូលតាម៤ យើងទាញបាន $a^2 \equiv 3 \pmod{4}$ ព្រោះ $5 \equiv 1 \pmod{4}$ ។ តែយើងដឹងថាចំនួនការេ សមមូលនឹង0រឺ១ $(\bmod 4)$ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

554. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ x, y, z ដែល

$$x^3 + 9y^3 = 3z^3$$

ចំលើយ

សន្មតថាសមីការមានចំលើយ។ សន្មតថា (x, y, z) ជាចំលើយវិជ្ជមានរឺសូន្យ ដែលតូចជាងគេក្នុងចំនោមចំលើយដែលអាចមាននៃសមីការ។សមីការនេះនាំអោយយើងទាញបានថា x^3 ជាពហុគុណនៃ៣ ដូច្នេះ x ជាពហុគុណនៃ៣។ ដូច្នេះ $x = 3x_1$ ។ យើងទាញបាន

$$27x_1^3 + 9y^3 = 3z^3$$

$$9x_1^3 + 3y^3 = z^3$$

$$\Rightarrow z = 3z_1$$

$$\Rightarrow 9x_1^3 + 3y^3 = 27z_1^3$$

$$\Rightarrow 3x_1^3 + y^3 = 9z_1^3$$

$$\Rightarrow y = 3y_1$$

$$\Rightarrow x_1^3 + 9y_1^3 = 3z_1^3$$

ដូច្នេះ (x_1, y_1, z_1) ដែល $x_1 < x; y_1 < y; z_1 < z$ ក៏ជារឺសរបស់សមីការ $x^3 + 9y^3 = 3z^3$ ដែរ។ តែយើងបានសន្មតថា (x, y, z) ជាចំលើយដែលតូចជាងគេ ដូច្នេះ មានតែ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ។

555. **ចូរបង្ហាញថា គេមានត្រីធាតុសនិទានមិនគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់**

$$\{x^3\}+\{y^3\}=\{z^3\}$$

ដែល $\{t\}=t-[t]$ តាងអោយ ផ្នែកទសភាគនៃ t។

ចំលើយ

សមីការមានរឹសងាយ $x_0=\dfrac{3}{5},\ y_0=\dfrac{4}{5},$ និង $z_0=\dfrac{6}{5}$ ។

ដោយភាគបែងរួមរបស់ x_0^3,y_0^3,z_0^3 ស្មើនឹង 125 នោះ បើយើងគុណ x_0^3,y_0^3,z_0^3 នឹងចំនួនមួយដែល សមមូលនឹង ១ តាម ១២៥ នោះ ផ្នែកទសភាគរបស់ x_0^3,y_0^3,z_0^3 មិនប្រែប្រួលទេ។ យើងមាន $(125k+1)^3$ សមមូលនឹង ១ តាម ១២៥។ ដូច្នេះ បណ្តាចំនួន

$$x=x_0(125k+1);y=y_0(125k+1);z=z_0(125k+1)$$

សុទ្ធតែជាចំលើយរបស់សមីការ។ ដូច្នេះសមីការមានរឹសច្រើនរាប់មិនអស់។

556. **ចូរកំនត់តំលៃវិជ្ជមានតូចបំផុត នៃ 12^m-5^n ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n។**

ចំលើយ

តាង $x=12^m-5^n$ ជាតំលៃតូចបំផុតដែលយើងត្រូវកំនត់។ យើងមាន $x\equiv -5^n\pmod 6$ ដូច្នេះ x ចែកមិនដាច់នឹង២ផង និងនឹង៣ផង។ ដូចគ្នាដែរ x ចែកមិនដាច់នឹង៥។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $x=1$ រឺក៏ $x\geq 7=12-5$ ។ ករណី $x=1$ មិនអាចទៅកើតទេ ព្រោះ

$$12^m-5^n\equiv -1\not\equiv 1\pmod 4$$

ដូច្នេះ $x=7$ (ពេល $m=1$ និង $n=1$)។

557. (ហុងគ្រី ១៩៩៨) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដែល $z \geq 2$ និង

$$(x+1)^2 + ... + (x+99)^2 = y^z$$

ចំលើយ

យើងមាន $(x+1)^2 + ... + (x+99)^2 = 99x^2 + 99(2x) + (1^2 + 2^2 + ... + 99^2)$

និង $\quad (1^2 + 2^2 + ... + 99^2) = \dfrac{99(99+1)(2.99+1)}{6} = 328350 = 36483(9) + 3$

ដូច្នេះ $\quad (x+1)^2 + ... + (x+99)^2 \equiv 3(\bmod 9)$ ។ ដូច្នេះ $y^z \equiv 3(\bmod 3^2)$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត $y^z \equiv 0(\bmod 3)$ ។ ដូច្នេះ $y^z = p.3$ ដែល p ជាចំនួនគត់ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ដោយ $z \geq 2$ នោះសមីការ $y^z = p.3$ មិនអាចមានចំលើយទេ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

558. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់និមួយៗ សុទ្ធតែអាចសរសេរជាផលបូកនៃ៥ចំនួនគូប ជាច្រើនរបៀបរាប់មិនអស់។

ចំលើយ

យើងមាន

$$(t+1)^3 + (t-1)^3 + (-t)^3 + (-t)^3 = 6t$$

តាង $\quad n = x^3 + (t+1)^3 + (t-1)^3 + (-t)^3 + (-t)^3$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា បើគេអោយ n នោះ គេអាចជ្រើសរើសយក t និង x ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងលើ។ យើងមាន

$$n = x^3 + 6t$$

$$x^3 = n - 6t$$

ដោយយើងមាន $a^3 \equiv a \pmod 6$ ចំពោះគ្រប់ a នោះ ចំពោះ n ណាមួយ ត្រូវតែមាន ចំនួនគត់ t មួយ ដែល $n^3 = n - 6t$ ។ ដូច្នេះ យើងយក $x^3 = n^3$ ដូច្នេះ មាន x ដែល $x^3 = n - 6t \Rightarrow n = x^3 + 6t \Rightarrow n$ ជាផលបូកនៃ ៥ចំនួនគូប។

559. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y ដែល $x^y = y^x$ ។

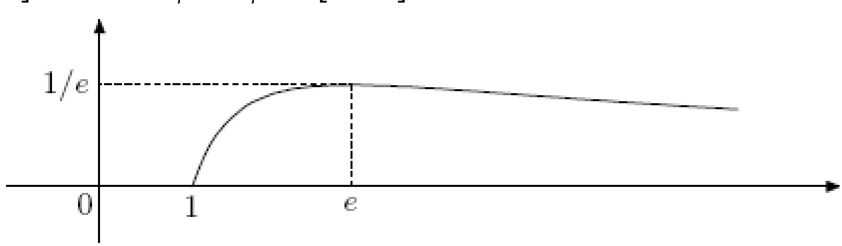
ចំលើយ

សមីការអាចសរសេរទៅជា

$$y \log x = x \log y$$

រឺក៏ $$\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y}$$

ដោយសិក្សាទៅលើអនុគមន៍ $f(t) = \frac{\log t}{t}$ យើងទាញបានថា អនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍កើនលើ $[1, e]$ ហើយជាអនុគមន៍ចុះលើ $[e, +\infty]$ ។



ដូច្នេះ យើងទាញបានថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់ពីរខុសគ្នា(សន្មតថា $x < y$) ដែល $x^y = y^x$ នោះ វាត្រូវតែ $x < e$ និង $y > e$ ដូច្នេះ $x = 2$ នាំអោយ $y = 4$ ។ ជាបញ្ចប់ចំលើយរបស់សមីការគឺ គូ(x, y) ដែល $x = y$ និង គូ $(2, 4)$ និង $(4, 2)$ ។

560. (អៀរឡង់ ១៩៩៦) តាង p ជាចំនួនបឋមមួយ និង a,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា បើ $2^p+3^p=a^n$ នោះ $n=1$។

ចំលើយ

បើ $p=2$ នោះ $2^2+3^2=13^1$ សំនើពិត។

បើ $p>2$ នោះ p ជាចំនួនបឋមសេស។ ចំពោះចំនួនសេស p យើងមាន

$$2^p+3^p=5\left(2^{p-1}-3.2^{p-2}+...+3^{p-1}\right)$$

$\Rightarrow 5$ ចែកដាច់ $2^p+3^p=a^n$

បើ $n\geq 2$ នោះ 25 ក៏ចែកដាច់ $2^p+3^p=a^n$ ដែរ។ ដូច្នេះ $\left(2^{p-1}-3.2^{p-2}+...+3^{p-1}\right)$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ ដោយ $3\equiv -2\pmod 5$ ដូច្នេះ

$$\left(2^{p-1}-3.2^{p-2}+...+3^{p-1}\right)\equiv p2^{p-1}\pmod 5$$

$\Rightarrow 5$ ចែកដាច់ p មានន័យថា $p=5$ ។ តែ $2^5+3^5=275=5^2.11$ មិនមែនជាចំនួនស្វ័យគុណទេ។

ដូច្នេះ សំនើពិត។

561. (លីទុយអានី ១៩៩៤) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ m,n,k ដែល $k\geq 2$ និង

$$1+2!+3!+...+n!=m^k$$

ចំលើយ

យើងមាន

$$a_8=46233\equiv 0\left(\mod 3^2\right)$$

$$a_8=46233\equiv 9\left(\mod 3^3\right)$$

ចំពោះ $n \ge 9$ យើងមាន $a_n = a_8 + 9! + 10! + \ldots + n! \equiv a_8 \equiv 9 \left(\mod 3^3 \right)$

ដូច្នេះមានន័យថា ចំពោះ $n \ge 8$ គេមាន a_n ចែកដាច់នឹង $3^2 = 9$ តែចែកមិនដាច់នឹង 3^3 ។

ដូច្នេះ $a_n = 3^2 q$ ដែល q ជាចំនួនគត់ចែកមិនដាច់នឹង 3^2 ។ ដោយ $a_n = m^k$ នោះ ត្រូវតែ $k = 2$ ។ គ្រប់ចំនួនការេសមមូលនឹង 0,1 រឺ 4 តាម 5 ។ ចំពោះ $n \ge 8$ យើងមាន

$a_n \equiv 1 + 2 + 2.3 + 2.3.4 = 33 \equiv 3 \left(\mod 5 \right)$ ។ ដូច្នេះអង្គទាំង២នៃសមីការមិនអាចស្មើគ្នាបានទេ។ យើងទាញបាន ថា សមីការគ្មានចំលើយទេ ពេល $n \ge 8$ ។

យើងពិនិត្យករណីនិមួយៗខាងក្រោម

$a_1 = 1 = 1^k, \forall k \Rightarrow$ ចំលើយសមីការ $\left(m, n, k \right) = \left(1, 1, k \right)$

$a_2 = 3$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_3 = 9 = 3^2 \Rightarrow$ ចំលើយសមីការ $\left(m, n, k \right) = \left(3, 3, 2 \right)$

$a_4 = 33$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_5 = 153 = 9.17$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_6 = 873 = 9.97$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_7 = 5913 = 81.73$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

562. (**អ៊ីតាលី ១៩៩៤**) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ x, y ដែល

$$y^2 = x^3 + 16$$

ចំលើយ

តាង $\left(x, y \right)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ បើសិនជាមាន។ យើងមាន

$$\left(y - 4 \right)\left(y + 4 \right) = x^3$$

បើ y ជាចំនួនសេស នោះ $y-4$ និង $y+4$ បឋមនឹងគ្នា ហើយជាគូប២ដែលខុសគ្នា៨ឯកតា ។ ករណីនេះមិនអាចមាន។ ដូច្នេះ $y=2y'$ ជាចំនួនគូ $\Rightarrow$ $x=2x'$ ជាចំនួនគូដែរ។ សមីការទៅជា

$$(y'+2)(y'-2)=2(x')^3$$

$$\Rightarrow \qquad (y'+2)^2-4(y'+2)=2(x')^3$$

$$\Rightarrow \qquad (y'+2)^2\equiv 0 \text{ ឬ } 2 \pmod 4$$ ដូច្នេះ $(y'+2)^2$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង៤ ដូច្នេះ y' ជាចំនួនគូ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $y'=2s, x'=2t$ នាំអោយ

$$(s+1)(s-1)=4t^3$$

ដូច្នេះ $s+1$ និង $s-1$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ នាំអោយ $s=2u+1$ ជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះ

$$u(u+1)=t^3$$

ដោយ u និង $u+1$ បឋមនឹងគ្នា នោះ វាត្រូវតែគូបទាំង២ ដូច្នេះ $u=-1$ ឬ 0 ហើយ $t=0$ ។

ដូច្នេះ សមីការមានចំលើយ២គត់ គឺ $(x,y)=(0,\pm 4)$ ។

563. **តាង x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $2x^x+y^y=3z^z$ ។ ចូរបង្ហាញថា** $x=y=z$ ។

ចំលើយ

បើ $z=1$ នោះ យើងទាញបាន $x=y=1$ ។ សន្មតថា $z\ge 2$ ។ បើគេមិនមាន $x=y=z$ នោះ មានមួយក្នុងចំនោម x និង y ដែលត្រូវតែធំជាង z ដាច់ខាត ដូច្នេះ ធំជាងឬស្មើ $z+1$ ។ បើសិនជាមួយនោះជា x យើងទាញបាន

$$2x^x\ge 2(z+1)^{z+1}>2z^{z+1}\ge 4z^z \qquad \text{ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។}$$

បើសិនជាមួយនោះជា y នោះ យើងទាញបាន

$$y^y \geq (z+1)^{z+1} > z^{z+1} + (z+1)z^z = (2z+1)z^z \geq 5z^z$$

ក៏ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែរ។

564. (អៀរឡង់ ១៩៩៤) ចំពោះតំលៃណាខ្លះនៃ a ដែលសមីការ

$$x^2 + axy + y^2 = 1$$

មានចំលើយច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុង $\mathbb{Z}$?។

ចំលើយ

យើងដឹងថា $x=1, y=-a$ ជាចំលើយរបស់សមីការជានិច្ច។

ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ (x,y) ជាចំលើយមួយនៃសមីការ នោះ x ជារឹសរបស់ពហុធា

$$X^2 + ayX + \left(y^2 - 1\right) = 0$$

ហើយ រឹសមួយទៀតរបស់ពហុធានេះ គឺ $-ay-x$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន គូរឹសមួយទៀត របស់សមីការគឺ $(-ay-x, y)$ ។ ដូចគ្នា សមីការមានរឹស $(x, -ax-y)$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ $|a|>2$ ហើយបើ x និង y មិនសូន្យ យើងមាន

បើ $|x| \leq |y|$

$$|-ay-x| = |ay+x| \geq |ay| - |x| = |a||y| - |x|$$

$$\geq (|a|-1)|y| > |y| \geq |x|$$

មានន័យថា បើ (x,y) ជាចំលើយ នោះ យើងអាចរកបាន ចំលើយផ្សេងមួយទៀត កំនត់ដោយ

$(-ay-x, y)$ ដែល $|-ay-x| > y \geq x$ ។

បើ $|y| \leq |x|$ នោះ $|-ax-y| > |x| \geq |y|$

មានន័យថា បើ (x,y) ជាចំលើយ នោះ យើងអាចរកបាន ចំលើយផ្សេងមួយទៀត កំនត់ដោយ

$$(x,-ax-y) \text{ ដែល } |-ax-y|>|x|\geq|y| \text{ ។}$$

តាង $x_0=1$ និង $y_0=-a$ ។ តាមលក្ខណៈ ដូចដែលយើងបានរៀបរាប់ពីខាងដើម យើងទាញរកស៊ីតនៃចំលើយ (x_n,y_n) ដែល

$$(x_0,y_0);\ |y_0|>|x_0| \Rightarrow (x_1,y_1=y_0) \text{ ដោយ } x_1>y_1\geq x_0$$

$$(x_1,y_1);|x_1|>|y_1| \Rightarrow (x_2=x_1,y_2) \text{ ដោយ } y_2>x_2\geq y_1$$

$$(x_2,y_2);|y_2|>|x_2| \Rightarrow (x_3,y_3=y_2) \text{ ដោយ } x_3>y_3\geq x_2$$

....

$$x_0<x_1=x_2<x_3........$$

លក្ខខណ្ឌចុងក្រោយនេះ ធានាថា ចំលើយទាំងអស់របស់សមីការខុសគ្នាពីរៗ។ ក្នុងករណីនេះ សមីការមានរឺសច្រើនរាប់មិនអស់។

បើ $a=2$ សមីការសរសេរទៅជា $(x-y)^2=1$ មានចំលើយច្រើនរាប់មិនអស់។

ដូចគ្នាករណី $a=-2$ ។

បើ $a=1$ នោះសមីការ ទៅជា $x^2+y^2=1-xy$ និង $(x+y)^2=1+xy$ ។ បណ្តាចំនួន $1-xy$ និង $1+xy$ ត្រូវតែជាចំនួនវិជ្ជមាន ដូច្នេះវាមិនអាចធ្វើអោយសមីការមានរឺស (x,y) រាប់មិនអស់ទេ។ ដូចគ្នា ពេល $a=-1$ ។

ជាចុងក្រោយ បើ $a=0$ នោះសមីការមានចំលើយចំនួនកំនត់។

ដូច្នេះ ដើម្បីអោយសមីការមានចំលើយច្រើនរាប់មិនអស់ សំណុំចំនួនគត់ a ត្រូវតែ $|a|\geq 2$ ។

565. **ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x, y, z ដែល**

$$x^2 + y^2 = 7z^2$$

ចំលើយ

យើងឃើញថា សមីការមាន រឹស $(0,0,0)$ ។សន្មតថា សមីការមានចំលើយផ្សេងទៀត។ តាង (x, y, z) ជាចំលើយតូចបំផុតរបស់សមីការដែលខុសពីសូន្យ។ បើ 7 ចែកដាច់ x រឺ y នោះ 7 ត្រូវតែចែកដាច់ x និង y ដូច្នេះ $x^2 + y^2$ ចែកដាច់នឹង 7^2 ។ ដូច្នេះ 7 ចែកដាច់ z ។ តាង $x = 7x_1;\ y = 7y_1;\ z = 7z_1$ ។ ដូច្នេះ ${x_1}^2 + {y_1}^2 = 7{z_1}^2$ ។ ដូច្នេះ (x_1, y_1, z_1) តូចជាង (x, y, z) ក៏ជាចំលើយសមីការដែរ។ ករណីនេះផ្ទុយពីការសន្មតដែល (x, y, z) ជាចំលើយតូចបំផុត។ ដូច្នេះ x និង y ត្រូវតែបឋមនឹង 7 ។ ដូច្នេះ

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 \equiv -y^2 \pmod 7$$

ដោយ y បឋមនឹង 7 នោះគេអាចរកបាន y' និង β ដែល $yy' + 7\beta = 1$ ។ ដូច្នេះ $yy' \equiv 1 \pmod 7$ ។ ដូច្នេះ $(xy')^2 \equiv -1 \pmod 7$ ។ តែចំនួនការេ មិនអាចសមមូលនឹង -1 តាម៧ ទេ។

ដូច្នេះសមីការមានចំលើយតែមួយគត់គឺ $(0,0,0)$ ។

566. **ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ a, b ដែល $a^4 + (a+b)^4 + b^4$ ជាចំនួនការេ។**

ចំលើយ

តាង $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ ជាចំលើយតូចជាងគេបង្អស់របស់សមីការ

$$a^4 + (a+b)^4 + b^4 = c^2$$

បើ a និង b សុទ្ធតែគូ នោះ 2^4 ចែកដាច់អង្គខាងឆ្វេង ដូច្នេះ វាចែកដាច់ c^2 ដូច្នេះ c ជាពហុគុណនៃ 4 ។ ដូច្នេះ $(a/2,b/2,c/4)$ ក៏ជាចំលើយរបស់សមីការដែរ។ ករណីនេះផ្ទុយពីការសន្មត។ ដូច្នេះ a រឺ b ជាចំនួនសេស។

ឧបមាថា a គូ ហើយ b សេស នោះ

$$a^4+(a+b)^4+b^4 \equiv 0+1+1 \equiv 2 \pmod 4$$ មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ។

ដូច្នេះ a និង b ត្រូវតែសេសទាំង២។ ករណីនេះ

$$a^4+(a+b)^4+b^4 \equiv 1+0+1 \equiv 2 \pmod 4$$ មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ។

ដូច្នេះ គូ (a,b) ដែល $a^4+(a+b)^4+b^4$ ជាចំនួនការេ មានតែ $(0,0)$ មួយប៉ុណ្ណោះ។

567. **ក) ចូរកំនត់ពាចំនួនគត់ធម្មជាតិ a,b,c (មិនបាច់ខុសគ្នាក៏បាន) ដែល**

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

ខ) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីអោយគេអាចរកបាន n ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $x_1,\dots,x_n$ (មិនបាច់ខុសគ្នាក៏បាន) ដែល

$$1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\dots+\frac{1}{x_n^2}$$

ចំលើយ

ក) យើងអាចសន្មតថា $a \le b \le c$ ។ យើងទាញបាន $\frac{1}{4} \le \frac{3}{a^2}$ ដូច្នេះ $a^2 \le 12$ ។ ដូច្នេះ $a=1, a=2$ រឺ $a=3$ ។ a មិនអាចស្មើ ១រឺ ២ ទេ។ បើ $a=3$ សមីការទៅជា

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$$

ដូចគ្នា យើងអាចបង្ហាញថា $b^2 \le \frac{72}{5}$ ដូច្នេះ $b=3$ ។ នាំអោយ $c=6$ ។

ដូច្នេះ ចំលើយរបស់សមីការ គឺ $(3,3,6),(3,6,3)$ និង $(6,3,3)$ ។

១) ដូចខាងលើដែរ យើងអាចបង្ហាញថា $n=2$ និង $n=3$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ។ ចំពោះ $n=4$ យើងយក $x_1=x_2=x_3=x_4=2$ ។

យើងនឹងបង្ហាញថា $n=5$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ។ ព្រោះបើ (a,b,c,d,e) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ដោយ $a\le b\le c\le d\le e$ នោះ យើងទាញបាន $1<a^2\le 5$ ដូច្នេះ $a=2$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន $b=2,c=2,d=2$ រួចហើយ $\frac{1}{e^2}=0$ មិនអាច។

ដោយដឹងថា $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}=\frac{1}{4}$ នោះ

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

ដូច្នេះ $(2,2,2,3,3,6)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការករណី $n=6$ ។

យើងមាន $\frac{1}{6^2}=\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{18^2}$ ដូច្នេះ $(2,2,2,3,3,9,9,18)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការករណី $n=8$ ។

យើងដឹងថា បើ $(x_1,\ldots,x_n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ នោះ $(2x_1,2x_1,2x_1,2x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការដែរ មានន័យថា បើ n ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ នោះ $n+3$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ដែរ។

ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនគត់ n ខុសពី ២, ៣ និង ៥ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។

568. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានរឺសូន្យ a,b,c,d ដែល

$$a^2+5b^2-2c^2-2cd-3d^2=0$$

ចំលើយ

តាង (a,b,c,d) ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a^2+5b^2=2c^2+2cd+3d^2=2\left(c+\frac{d}{2}\right)^2+\frac{5}{2}d^2$$

សន្មតថា (a,b,c,d) ជាសំនុំចំលើយដែលតូចជាងគេ។

ដោយគុណអង្គទាំង២នឹង៤

$$4a^2+20b^2=2(2c+d)^2+10d^2$$

គណនាសមមូលតាម ៥ សមីការនេះទៅជា

$$4a^2\equiv 2(2c+d)^2 \pmod 5$$

ដោយចំនួនការេ តាម៥ សមមូលនឹង 0,១ និង -1 នោះ

$$4a^2\equiv 0,1,4 \pmod 5 \text{ និង } 2(2c+d)^2\equiv 0,2,3 \pmod 5$$

ដូច្នេះ $4a^2\equiv 0 \pmod 5$ និង $2(2c+d)^2\equiv 0 \pmod 5$ ។ ដូច្នេះ a និង $2c+d$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង5 ។ តែថា

$$4a^2-2(2c+d)^2=10d^2-20b^2$$

អង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង២៥ ដូច្នេះ $d^2\equiv 2b^2 \pmod 5$ ។ យើងមាន $d^2\equiv 0,1,4 \pmod 5$ និង $2b^2\equiv 0,2,8 \pmod 5$ ។ ដូច្នេះ $d^2\equiv 0 \pmod 5$ និង $2b^2\equiv 0 \pmod 5$ ។ ដូច្នេះ ៥ត្រូវតែចែកដាច់ b និង d ។ ដូច្នេះ 5 ចែកដាច់ a,b,c,d ដូច្នេះ $(a/5,b/5,c/5,d/5)$ ជាចំលើយមួយទៀតរបស់សមីការដែលតូចជាងមុន។ ករណីនេះផ្ទុយពីសន្មតិ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយផ្សេងពីសូន្យទេ។

569. **ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនបឋម p,q និង ចំនួនគត់ $r,s\geq 2$ ដែល**

$$\left|p^r-q^s\right|=1$$

ចំលើយ

ផលសងស្វ័យគុណនៃ p និង q ជាចំនួនសេស។ ដូច្នេះត្រូវមានមួយគូ មួយសេស។ ដោយ p និង q សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម នោះត្រូវតែមានមួយស្មើ២។ ជាដំបូងយើងសន្មតថា $q=2$ ។ បន្ទាប់មកទៀត p ជាចំនួនបឋមសេស ដែល

$$p^r \pm 1 = 2^s$$

បើ r ជាចំនួនសេស នោះ

$$p^r - 1 = (p-1)\left(p^{r-1} + p^{r-2} + \ldots + 1\right)$$

$$p^r + 1 = (p+1)\left(p^{r-1} - p^{r-2} + \ldots + 1\right)$$

ដូច្នេះ $p^r \pm 1$ ជាពហុគុណនៃ

$$p^{r-1} \mp p^{r-2} + p^{r-3} \mp \ldots \mp p + 1$$

ដែលជាចំនួនសេសធំជាង១ដាច់ខាត។ ដូច្នេះវាមិនអាចជា 2^s ទេ។ យើងទាញបានថា r ជាចំនួនគូ។

តាង $r=2t$ ។ ដូច្នេះ p^{2t} ជាការេនៃចំនួនសេស ដូច្នេះ វាសមមូលនឹង១ តាម ៤។ ដូច្នេះ $p^r + 1 \equiv 2 \pmod 4$ ហើយដូច្នេះ $p^r + 1 = 2^s$ នាំអោយ $s=1$ ។ តំលៃ s យើងមិនយកព្រោះ $s \ge 2$ ។

នៅសល់ករណី $p^{2t} - 1 = 2^s$ មួយទៀត។ ផលគុណ $\left(p^t - 1\right)\left(p^t + 1\right)$ ជាស្វ័យគុណនៃ ២ ដូច្នេះ កត្តានិមួយៗត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ២ដែរ។ ចំនួនស្វ័យគុណនៃ២ចំនួន២ ដែលខុសគ្នា២ឯកតា មិនមានអ្វីក្រៅតែពី២និង៤ទេ។ ដូច្នេះ $p=3,\ t=1$ និង $s=3$ ដូច្នេះ $r=2$ ។

ដូច្នេះសមីការមានចំលើយ

$$p=3, q=2, r=2, s=3$$

និង $$p=2, q=3, r=3, s=2$$

570. ចូរកំនត់ចំនួនគត់ t តូចបំផុត ដែល គេមានចំនួនគត់ $x_1,...,x_t$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x_1^3+...+x_t^3=2002^{2002}$$

ចំលើយ

យើងមាន $2002^{2002}=2002^{2001}.2002 =\left(2002^{667}\right)^3.\left(10^3+10^3+1^3+1^3\right)$

ដូច្នេះ 2002^{2002} អាចសរសេរជាផលបូកនៃ ៤ចំនួនគូប។ យើងមាន

$$2002^{2002}\equiv 4^{2002}\equiv 4^{6.333+4}\equiv 4^4\equiv 4 \pmod 9$$

ព្រោះ $\phi(9)=6$ ។ តែថាបណ្តាចំនួនគូប តាម៩ សមមូលនឹង $0,1,-1$ ដូច្នេះយើងទាញបាន ថា ផលបូកនៃ៣ចំនួនគូបរឺតិចជាងនេះ មិនអាចសមមូលនឹង៤ តាម ៩ ទេ។

ដូច្នេះ $t=4$ ។

571. (តៃវ៉ាន់ ១៩៩៨) តើសមីការខាងក្រោម

$$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=xyzuv-65$$

ដែល x,y,z,u,v ជាចំនួនគត់ធំជាង ១៩៩៨ មានរឹសរឺទេ?។

ចំលើយ

សមីការ

$$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=xyzuv-65$$

មានរឹសងាយ $(1,2,3,4,5)$ ព្រោះ

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55=1.2.3.4.5-65$$

សន្មតថាសមីការមានចំលើយផ្សេងទៀត (x,y,z,u,v) ។ សន្មតថា x តូចជាងគេ។ យើងសរសេរសមីការដែលអោយជាសមីការដឺក្រេទី២ធៀបនឹង x ។ យើងទាញបានថា បើ x ជារឹសមួយ នោះ $(yzuv-x,y,z,u,v)$ ជាចំលើយមួយទៀត។ យើងមាន

$yzuv \ge 8y \ge 8x$ ដូច្នេះ $yzuv - x \ge 7x > x$ ជាចំលើយមួយទៀតដែលធំជាងមុន។ បន្ទាប់មកទៀត ចំពោះចំលើយថ្មីនេះ យើងជ្រើសរើសយកធាតុតូចជាងគេ រួចទាញរកចំលើយថ្មីមួយទៀតដែលធំជាងមុន។ ដូច្នេះជាបន្តបន្ទាប់ យើងទាញបានធាតុតូចជាងគេចេះតែកើនទៅៗ។ ដូច្នេះជាចុងក្រោយ នៅបន្ទាប់ពីប៉ុន្មានជំហានក្រោយមកយើងនឹងទាញបានចំលើយដែលមាន x, y, z, u, v ដែលនិមួយៗធំជាង 1998 ទាំងអស់។

572. (ឥណ្ឌា ១៩៩៨) ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, n ដែល

$(x, n+1) = 1$ និង $x^n + 1 = y^{n+1}$ ។

ចំលើយ

$$x^n + 1 = y^{n+1}$$

$$\Rightarrow \qquad x^n = (y-1)\left(1 + y + \ldots + y^n\right) \qquad (*)$$

បើ p ជាតួចែកបឋមរបស់ $y-1$ នោះ p ចែកដាច់ x ហើយចែកមិនដាច់ $n+1$ ទេ ព្រោះវាបឋមនឹង x ។ តែយើងមាន

$$1 + y + \ldots + y^n \equiv n + 1 \left(\mathrm{mod}\,(y-1)\right)$$

ដូច្នេះ p ក៏ចែកមិនដាច់ $1 + y + \ldots + y^n$ ដែរ។ ដូច្នេះ $y-1$ បឋមនឹង $1 + y + \ldots + y^n$ ។ ដូច្នេះ តាមទំនាក់ទំនង (*) យើងទាញបាន $1 + y + \ldots + y^n$ ជាចំនួនស្វ័យគុណទី n ។ តែវាមិនអាចមានទេ ព្រោះវាជាចំនួនគត់ស្ថិតនៅចន្លោះចំនួនស្វ័យគុណទី n ២តរៀងគ្នា y^n និង $(y+1)^n$ ដាច់ខាត ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

573. (គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ ១៩៩៧)

ចូរកំនត់គ្រប់គូ (a,b) នៃចំនួនគត់ $a \ge 1, b \ge 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$a^{b^2} = b^a$$

ចំលើយ

បើ $a \geq b$ នោះ $a^{b^2} = b^a \leq a^a$ ដូច្នេះ $a \geq b^2$ ។ ដូច្នេះ $a^{2b^2} = b^{2a} \leq a^a$ ដូច្នេះ $a \geq 2b^2$ ។

តាង $x = \frac{a}{b^2}$ ហើយយើងនឹងបង្ហាញថា x ជាចំនួនគត់។ បន្ទាប់មកទៀត

$$x^{b^2} = \frac{a^{b^2}}{b^{2b^2}} = b^{a-2b^2}$$

ជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះយើងទាញបាន ថា x ជាចំនួនគត់ (ព្រោះវាជាចំនួនសនិទាន)។

យើងមាន $a = b^2x \Rightarrow b^a = b^{b^2x} \Rightarrow a^{b^2} = b^{b^2x} \Rightarrow a = b^x \Rightarrow$ $x = b^{x-2}$

បើ $b = 1$ យើងទាញបាន $x = 1$ ។ បើ $b \geq 2$ នោះសមភាពមិនមានទេ ពេល $x > 4$ ។ ចំពោះ $x = 3$ យើងទាញបាន $b = 3$ ហើយចំពោះ $x = 4$ យើងទាញបាន $b = 2$ ។ ចំលើយរបស់សមីការគឺ $(1,1), (16,2), (27,3)$ ។

បើ $a \leq b$ នោះយើងមាន $a^{b^2} = b^a \leq b^b$ ដូច្នេះ $a^b \leq b$ វិសមភាពនេះមិនអាចពិតទេ បើ $a \geq 2$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានចំលើយសមីការ $(1,1)$ ។

ជាសរុបសមីការមានចំលើយ $(1,1), (16,2), (27,3)$ ។

574. យើងពិនិត្យសមីការ

$$\left(a^a\right)^n = b^b \qquad (*)$$

ក) ចំពោះចំនួនគត់ណាខ្លះនៃ n ដែលសមីការ $(*)$ មានចំលើយគត់មួយដែល $a, b > 1$។

ខ) ដោះស្រាយសមីការ $(*)$ ចំពោះ $n = 5$។

ចំលើយ

ក) គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងអស់ លើកលែងតែករណី $n=2$ ចេញ។ ព្រោះ បើ $n=1$ យើងយក $a=b\geq 2$ ។ បើ $n\geq 3$ យើងយក $a=(n-1)^{n-1}$ និង $b=(n-1)^{n}$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $n=2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ។ តាមវិធីសាស្រ្តស្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត យើងសន្មតថា មានចំនួនគត់ $a,b\geq 2$ ដែល

$$\left(a^{a}\right)^{2}=b^{b} \qquad (**)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនបឋមដែលចែក a ដាច់ សុទ្ធតែចែក b ដាច់ទាំងអស់។ យើងឃើញថា បើ $b\leq a$ នោះ $b^{b}\leq a^{a}<\left(a^{a}\right)^{2}$ ហើយ បើ $b\geq 2a$ នោះ

$b^{b}\geq (2a)^{2a}=2^{2a}\left(a^{a}\right)^{2}>\left(a^{a}\right)^{2}$ ។ ដូច្នេះវាត្រូវតែ $a<b<2a$ ។

តាង p ជាចំនួនបឋម ដែល ចែកដាច់ a ដូច្នេះចែកដាច់ b ដែរ។ តាង α (និង β រៀងគ្នា) ជានិទស្សន្តរបស់ p ក្នុងផលគុណកត្តាបឋមរបស់ a (និង b រៀងគ្នា) មានន័យថា $a=p^{\alpha}k, b=p^{\beta}l$ ។

$\left(a^{a}\right)^{2}=b^{b} \Rightarrow a^{2a}=b^{b} \Rightarrow p^{2a\alpha}k^{2a}=p^{b\beta}l^{b} \Rightarrow 2a\alpha=b\beta$ មានន័យថា $\alpha/\beta=b/2a<1$ ដូច្នេះ $\alpha<\beta$ ។

បន្ទាប់មកទៀត ដោយដឹងថា គ្រប់ចំនួនបឋម ដែលចែកដាច់ a ក៏ចែក b ដាច់ដែរ ហើយ $\alpha<\beta$ នោះយើងទាញបានថា b ជាពហុគុណនៃ a តែវាមិនអាចព្រោះ $a<b<2a$ ។ ដូច្នេះ $n=2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់។

ខ) សមីការមានរឹសងាយ $(1,1)$ ។ សន្មតថា $a,b\geq 2$ ជាចំនួនគត់ ដែល

$$\left(a^{a}\right)^{5}=b^{b}$$

តាមរបៀបស្រាយបញ្ជាក់ដូចក្នុងសំនួរក) យើងទាញបានថា $a<b<5a$ ហើយថា a ចែកដាច់ b ។ ដូច្នេះ $b=ka$ ដែល $k\in\{2,3,4\}$ ។ សមីការទៅជា $a^{5a}=(ka)^{ka} \Rightarrow$

$a^{5-k}=k^k$ ។ ចំពោះ $k=2$ យើងមាន $a^3=4$ មិនអាច។ ចំពោះ $k=3$ យើងទាញបាន $a^2=27$ មិនអាច។ ចំពោះ $k=4$ យើងទាញបាន $a=4^4$ បន្ទាប់មក $b=4^5$ ។ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាវាជាចំលើយរបស់សមីការ។

ដូច្នេះសមីការមានចំលើយ $(1,1)$ និង $\left(4^4,4^5\right)$ ។

575. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y ដែល

$$x+y^2+z^3=xyz$$

ដែល $z=PGCD\left(x,y\right)$ ។

ចំលើយ

តាង $x=zc$ និង $y=zb$ ដែល b និង c ជាចំនួនគត់បឋមនឹងគ្នា។ សមីការទៅជា

$$c+zb^2+z^2=z^2cb$$

យើងទាញបានថា z ចែកដាច់ c ដូច្នេះ $c=za$ ចំពោះចំនួនគត់ a ។ សមីការបំលែងទៅជា $a+b^2+z=z^2ab$ ដូច្នេះ

$$a=\frac{b^2+z}{z^2b-1}$$

$$\Rightarrow \qquad z^2a=b+\frac{b+z^3}{z^2b-1}$$

$\Rightarrow$ តួ $\dfrac{b+z^3}{z^2b-1}$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ ហើយដោយវាជាចំនួនវិជ្ជមាន (ធំជាងរឺស្មើ១) ហើយ

ដូចនេះ $b\le\dfrac{z^2-z+1}{z-1}$ ។ តំលៃរបស់ $\dfrac{z^2-z+1}{z-1}$ តូចជាង $z+1$ ដាច់ខាត ពេល $z\ge 3$ ។

ដូច្នេះ បើ $z\ge 3$ នោះ $b\le z$ ហើយ ដូច្នេះ $a\le\dfrac{z^2+z}{z^2-1}<2$ ។ នាំអោយ $a=1$ ហើយ

សមីការទៅជា

$1+b^2+z=z^2b$

ជាសមីការដឺក្រេទី២ធៀបនឹង b ដែលមានឌីសគ្រីមីណង់ ស្មើ z^4-4z-4 ។ វាមិនអាចជាចំនួនការេបានទេ ព្រោះ វាស្ថិតក្នុងចន្លោះ $\left(z^2-1\right)^2$ និង z^4 ដាច់ខាត។ ដូច្នេះយើងគ្មានចំលើយទេ។

ដូច្នេះនៅសល់ករណី $z=1$ និង $z=2$ ទៀត។ ចំពោះ $z=1$ យើងមាន

$$a=\frac{b^2+1}{b-1}=b+1+\frac{2}{b-1}$$

ដូច្នេះ $b=2$ រឺ $b=3$ ។ ដូច្នេះ យើងទទួលបានចំលើយ២គឺ $(x,y)=(5,2)$ រឺ $(x,y)=(5,3)$ ។

បើ $z=2$ យើងសរសេរ

$$16a=\frac{16b^2+32}{4b-1}=4b+1+\frac{33}{4b-1}$$

ដូច្នេះ $b=1$ រឺ $b=3$ ។ យើងទទួលបានចំលើយ ២ទៀត គឺ $(x,y)=(4,2)$ រឺ $(x,y)=(4,6)$ ។

ចំលើយគឺ $(5,2),(5,3),(4,2),(4,6)$ ។

576. ក) ចូរកំនត់ត្រីកោណកែង ដែលមានជ្រុងជាចំនួនគត់ដែល មានក្រលាផ្ទៃជាការេនៃចំនួនគត់។

ខ) ចូរកំនត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y,z ដែល $x^4-y^4=z^2$ ។

ចំលើយ

ក) តាង x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល $x^2+y^2=z^2$ និង $\frac{xy}{2}$ ជាចំនួនការេ។ សន្មតថា x,y,z ជាចំលើយតូចបំផុត ដូច្នេះ ពួកបឋមរវាងគ្នាពីរៗ។ តាង

$$x=u^2-v^2;\ y=2uv;\ \text{នោះ}\ z=u^2+v^2$$

ដែល u និង v ជាចំនួនវិជ្ជមានដាច់ខាត និង បឋមនឹងគ្នា ហើយមានលក្ខណៈគូសេស ផ្ទុយគ្នា។ ដូច្នេះក្រលាផ្ទៃត្រីកោណទៅជា $uv(u-v)(u+v)$ ។ ដោយ u និង v មានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា នោះ $u+v$ និង $u-v$ សេសទាំង២ ដូច្នេះបឋមនឹងគ្នាដែរ។ ដូច្នេះ កត្តាទាំង៤សុទ្ធតែបឋមនឹងគ្នា២ៗ ហើយនិមួយៗជាចំនួនការេ។ មានចំនួនគត់ a,b និង ចំនួនគត់សេស c,d ដែល

$$u=a^2;v=b^2;u+v=c^2;u-v=d^2$$

យើងមាន $2b^2=c^2-d^2\equiv 0\pmod 4$ ដូច្នេះ b ជាចំនួនគូ។ តាង $b=2b'$ នោះ

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(\frac{c-d}{2}\right)=2b'^2$$

ដូច្នេះត្រូវតែមានយ៉ាងហោចមួយក្នុងចំនោម $\left(\frac{c+d}{2}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ ជាចំនួនគូ។ ដោយ c និង d សេសទាំង២ នោះ មានតែមួយប៉ុណ្ណោះក្នុងចំនោម $\left(\frac{c+d}{2}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ ដែលជា ចំនួនគូ។

បើ ចំនួននោះ ជា $\frac{c+d}{2}$ នោះ

$$\left(\frac{c+d}{4}\right)\left(\frac{c-d}{2}\right)=b'^2$$

ដោយ $\left(\frac{c+d}{4}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ បឋមនឹងគ្នា នោះ មាន r,s ដែល

$$c+d=4s^2;c-d=2r^2$$

យើងឃើញថា $a^2=r^4+4s^4$ ដូច្នេះ ត្រីធាតុ $\left(r^2,2s^2,a\right)$ ជាចំលើយមួយទៀត ដែល $a<z$ ។ ផ្ទុយពីសន្មតិ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ។

១) តាង x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល

$$x^4-y^4=z^2$$

តាង $X=x^4-y^4, Y=2x^2y^2$ និង $Z=x^4+y^4$ ។ ដូច្នេះ X,Y និង Z ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណកែងមួយដែលមានក្រលាផ្ទៃជាចំនួនការេ។ តាមសំនួរក) ករណីនេះអាចទៅរួចលុះត្រាតែ $X=0$ នាំអោយ $x=y$ និង $z=0$ ។ តែនេះមិនមែនជាចំលើយដែលអាចយកបានទេ។ ដូច្នេះចំនោទគ្មានចំលើយ។

577. ទ្រឹស្តីបទ–ត្រីធាតុពីតាករ

តាង x,y,z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលមានតួចែករួមស្មើ១ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2+y^2=z^2$$

ដូច្នេះ x រឺក៏មិនអញ្ចឹងទេ y ជាចំនួនគូ។ ក្នុងករណីដែល x ជាចំនួនគូ នោះគេមានចំនួនគត់ m និង n ដែលបឋមនឹងគ្នា ហើយមានភាពគូសេសផ្ទុយគ្នាដែល

$$x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2 ។$$

សំរាយបញ្ជាក់

បើ d ជាតួចែករួមរបស់ x និង y នោះ d^2 ចែកដាច់ x^2+y^2 ដូច្នេះ ចែកដាច់ z^2 ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់ z ហើយ d ជាតួចែករួមរបស់ x,y,z ។ តាមសម្មតិកម្ម $d=1$ ។ ដូច្នេះ x,y បឋមនឹងគ្នា។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន x,y,z បឋមនឹងគ្នា២ៗ។

បើ x និង y សេសទាំង២ នោះ យើងមាន $x^2\equiv y^2\equiv 1\pmod 4$ ដូច្នេះ $z^2=x^2+y^2\equiv 2\pmod 4$ មិនអាច។ ដូច្នេះត្រូវតែមានមួយជាចំនួនគូ។ សន្មតថា x ជាចំនួនគូ។ យើងសរសេរជា $x=2x'$ ។

សមីការទៅជា

$$4x'^2=(z-y)(z+y)$$

កត្តាទាំង២ $z-y$ និង $z+y$ មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ដូច្នេះគូទាំង២ដូចគ្នា។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ d ជាតួចែករួមរបស់ $z-y$ និង $z+y$ នោះ d ចែកដាច់ផលបូកនិងផលសងនៃចំនួនទាំង២ មានន័យថា ចែកដាច់ $2z$ និង $2y$ ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់២ ព្រោះ y,z បឋមនឹងគ្នា។ មានន័យថា $d=1$ រឺ 2 ដូច្នេះ ចំនួនគត់ $\frac{z-y}{2}$ និង $\frac{z+y}{2}$ ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ ដោយផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំង២

$$\frac{z-y}{2}=m^2 \text{ និង } \frac{z+y}{2}=n^2$$

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា m,n ។ ដោយជំនួសចូលក្នុងសមីការ យើងទាញបាន $x^2=4m^2n^2$ នាំអោយ $x=2mn$ (ព្រោះសន្មតថា x វិជ្ជមាន) ។

ជាបញ្ចប់ m និង n មានលក្ខណៈគូសេសខុសគ្នា ព្រោះបើសិនជាដូចគ្នា នោះ y,z នឹងជាចំនួនគូទាំង២។

578. ចូរបង្ហាញថា គ្មានត្រីធាតុនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $x^4+y^4=z^4$ ទេ។

ចំលើយ

សន្មតថា ត្រីធាតុបែបនោះមាន។ ក្នុងចំនោមចំលើយទាំងនោះ យើងយក (x,y,z) ដែល $d=PGCD(x,y,z)=1$ រឺក៏ជាចំលើយដែលតូចជាងគេបង្អស់។ នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌអស់នេះ តាមទ្រឹស្តីបទ**ត្រីធាតុពីតាករ** នោះគេមានចំនួនគត់ m,n ដែលបឋមនឹងគ្នា ដែល

$$x^2=2mn; y^2=m^2-n^2; z=m^2+n^2$$

ដូច្នេះ $m^2=n^2+y^2$ និង ចំនួនគត់ m,n,y មានតួចែករួមស្មើ១។ ម្យ៉ាងវិញទៀត y ជាចំនួនសេស (ព្រោះ x ជាចំនួនគូ) ហើយដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទដដែល គេមាន២ចំនួនបឋមនឹងគ្នា u,v ដែល

$$u = x'^2; v = y'^2; u^2 + v^2 = z'^2$$

យើងទាញបានថា $x'^4 + y'^4 = z'^2$ ដែល $x' < x; y' < y; z' < z$ ។ ដូច្នេះវាផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា x, y, z ជាចំលើយវិជ្ជមានដែលតូចជាងគេ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយគត់វិជ្ជមានទេ។

579. គណនារឺសសនិទាន x, y ដែល

$$x^2 + y^2 = 1$$

ចំលើយ

ចំនោទនេះសមមូលនឹង ការកំនត់គ្រប់ចំនុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន នៅលើរង្វង់មួយដែលមានកាំឯកតា។ នៅលើរង្វង់នេះ យើងយកចំនុច $A(1,0)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន។ យើងគូសបន្ទាត់ Δ មួយ(មិនឈរ) កាត់តាម A បន្ទាត់នេះកាត់រង្វង់ត្រង់ចំនុច B មួយទៀត។

តាមពិតទៅចំនុច B មានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន លុះត្រាតែ មេគុណាប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់នេះជាចំនួនសនិទាន។ ព្រោះ បើ Δ មិនមែនជាបន្ទាត់ឈរទេ សមីការបន្ទាត់ Δ មានរាង $y = t(x-1)$ ។ ចំនុចប្រសព្វរវាង Δ ជាមួយរង្វង់ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = t(x-1)$$

ដូច្នេះ

$$x^2 + t^2(x-1)^2 = 1$$
$$(1+t^2)x^2 - 2xt^2 + (t^2 - 1) = 0$$

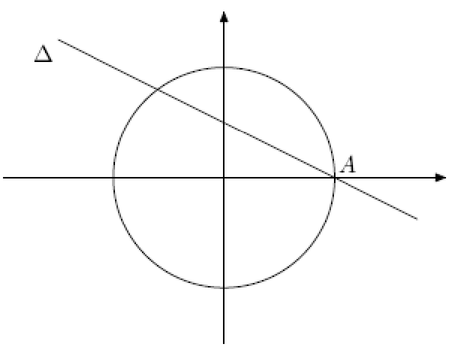
សមីការនេះមានរឹសមួយស្មើ $x=1$ ។ ផលបូករឹសទាំង២របស់សមីការ ស្មើ $\frac{2t^2}{1+t^2}$ ។ រឹសមួយទៀតមានតំលៃ

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

អរដោនេ y កំនត់ដោយ $y=t\left(x-1\right)=\frac{-2t}{t^2+1}$ ។ ចំនួនពីរនេះជាចំនួនសនិទានបើ t ជាចំនួនសនិទានដែរ។

ប្រាសមកវិញ យើងឃើញថា បើចំនុច A និង B មានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន នោះបន្ទាត់ (AB) ជាមេគុណប្រាប់ទិសជាចំនួនសនិទាន។ ដូច្នេះ យើងបានបង្ហាញថា គ្រប់ចំលើយសនិទាន ក្រៅពី $x=1, y=0$ កំនត់ដោយ

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1}; \qquad y=\frac{-2t}{t^2+1}$$



580. ចូរកំនត់ចំនួនសនិទាន x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2+3y^2=1$$

ចំលើយ

យើងឃើញថា $x=1$ និង $y=0$ ជាចំលើយមួយ។ តាង t ជាចំនួនសនិទាន ដែល $y=t(x-1)$ ។ សមីការទៅជា

$$x^2+3t^2(x-1)^2=1$$

ចំលើយរបស់សមីការនេះគឺ $x=1$ និង $x=\frac{3t^2-1}{3t^2+1}$ ។ តំលៃ y ត្រូវគ្នា $y=-\frac{2t}{3t^2+1}$ ។

ជាបញ្ចប់ចំលើយរបស់សមីការគឺ

$$\left(\frac{3t^2-1}{3t^2+1},-\frac{2t}{3t^2+1}\right) \text{ និង } (1,0)$$

ចំពោះគ្រប់ t ជាចំនួនសនិទាន។

581. សមីការប៉ែល–ភែម៉ា

សមីការប៉ែល–ភែម៉ាមានរាង

$$x^2-d.y^2=\pm 1$$

ដែល d ជាចំនួនគត់មួយដែលគេសន្មតថា គ្មានកត្តាជាចំនួនគត់ការេ។

ជាដំបូងយើងពិនិត្យលើសមីការ

$$x^2-d.y^2=1$$

យើងឃើញថា គូ $(1,0)$ ជាចំលើយមួយ។ ដូច្នេះ យើងកំនត់ចំនួនសនិទាន t មួយដែល $y=t(1-x)$ ។ សមីការទៅជា

$$x^2-d.t^2(1-x)^2=1$$

ចំលើយមួយទៀតរបស់សមីការនេះ គឺ

$$x=\frac{d.t^2+1}{d.t^2-1} \qquad y=\frac{-2t}{d.t^2-1}$$

យើងបានកំនត់គ្រប់ចំលើយសនិទានរបស់សមីការ។

582.ទ្រឹស្តីបទ

តាង d ជាចំនួនគត់មួយ ដែលគ្មានកត្តារបស់វាជាចំនួនគត់ការេ។
សមីការ**ផែល**

$$x^2 - d.y^2 = 1$$

មានចំលើយយ៉ាងតិចមួយ។ តាង (x_0, y_0) ជាចំលើយមួយមិនសូន្យ ដែល $x_0 + y_0\sqrt{d}$ មានតំលៃតូចបំផុត។ ចំលើយនេះគេហៅថាចំលើយគោល។
ចំលើយផ្សេងទៀតរបស់សមីការជាគូ (x_n, y_n) កំនត់ដោយ

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងសន្មតថា មានចំលើយមិនសូន្យមួយ។ ដូច្នេះមានន័យថាសមីការមានចំលើយគោលមួយ។ បន្ទាប់មកទៀត យើងឃើញថា

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n$$

ក៏ជាចំលើយដែរ។ ព្រោះ ពេលគុណវានឹងតំលៃច្រាសរបស់វា យើងទាញបាន

$$x_n^2 - d.y_n^2 = \left(x_0^2 - d.y_0^2\right)^n = 1$$

យើងត្រូវបង្ហាញទៀតថាសមីការនេះមានតែចំលើយអស់នេះប៉ុណ្ណោះ។ វិធីគឺត្រូវចាប់ផ្តើមពី (x, y) ។ យើងពិនិត្យចំនួន $x + y\sqrt{d}$ ហើយយើងចង់ចែកវានឹង $x_0 + y_0\sqrt{d}$ យើងទាញបាន

$$\frac{x+y\sqrt{d}}{x_0+y_0\sqrt{d}}=\left(x+y\sqrt{d}\right)\left(x_0-y_0\sqrt{d}\right)$$
$$=\left(xx_0-dyy_0\right)+\left(yx_0-xy_0\right)\sqrt{d}$$

ដោយ $x_0+y_0\sqrt{d}>1$ យើងមាន $\left(xx_0-dyy_0\right)+\left(yx_0-xy_0\right)\sqrt{d}<x+y\sqrt{d}$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត គូ $\left(x_0,y_0\right)$ និង(x,y) ជាចំលើយរបស់សមីការ ហើយដូច្នេះយើងទាញបាន

$$\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2=d+\frac{1}{y_0^2};\left(\frac{x}{y}\right)^2=d+\frac{1}{y^2}$$

ហើយដោយ $y>y_0$ និង $d>1$ នោះ $yx_0-xy_0\geq 0$ និង $xx_0-dyy_0\geq 0$ ។

584– ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $0<\varepsilon<1$ គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n_0 មួយ ដែលមេគុណរបស់ពហុធា

$$(x+y)^n\left(x^2-(2-\varepsilon)xy+y^2\right)$$

ជាចំនួនវិជ្ជមាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq n_0$ ។

585– តាង $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ជាចំនួនគត់សេស ដែលគ្មានមួយណាក្នុងចំនោមនោះ មានកត្តាបឋមធំជាង៥ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{15}{8}$$

586– គណនាចំនួនគត់ (x,y) ដែល

$$\left(x^2+y\right)\left(x+y^2\right)=(x-y)^3$$

587– គណនាចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $n^{n+1}+(n+1)^n$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

588– គេអោយស្វ៊ីត៣ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty},\{y_n\}_{n=0}^{\infty},\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ដែល x_0,y_0,z_0 ជាចំនួនវិជ្ជមាន និង

$$x_{n+1}=y_n+\frac{1}{z_n}$$

$$y_{n+1}=z_n+\frac{1}{x_n}$$

$$z_{n+1}=x_n+\frac{1}{y_n}$$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនវិជ្ជមាន s និង t ដែល $s\sqrt{n}\leq x_n\leq t\sqrt{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$។

589– គណនាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន (x,y,z) ដែល

$3x^2+54=2y^2+4z^2,$

$5x^2+74=3y^2+7z^2,$

$x+y+z$ មានតំលៃតូចបំផុត

590– គេអោយចំនួនបឋម p និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a, a\le p$។ សន្មតថា $A=\sum_{k=0}^{p-1}a^k$ ។ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់តួចែកបឋម q ទាំងអស់របស់ A គេមាន $q-1$ ចែកដាច់នឹង p ។

591–គណនាចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ធំបំផុត ដែល ១៩៩៥ ស្មើនឹងផលបូក នៃ n ចំនួនគត់ $a_1,a_2,...,a_n$ ដែល $a_i,(i=1,2,..,n)$ ជាចំនួនបន្សំ។

592– គណនាចំនួនគត់ ដែល

$x\left(1+x+x^2\right)=4y(y+1)$

593– គេអោយ៣ចំនួនគត់ x,y,z ដែល $x^4+y^4+z^4=1984$ ។ ចូរបង្ហាញថា $p=20^x+11^y-1996^z$ មិនអាចសរសេរជាផលគុណនៃ ២ចំនួនគត់ធម្មជាតិបន្តបន្ទាប់គ្នាបានទេ។

594– ចូរកំនត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n តូចបំផុតដែល n^2+n+1 អាចសរសេរជាផលគុណនៃ៤ចំនួនបឋម។

595– តាង p ជាចំនួនបឋមមួយ។ n,k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល ។ សន្មតថា $b_i, 1\le i\le k$ ជាចំនួនគត់ដែល

ក) $0\le b_i\le k-1, \forall i$

ខ) p^{nk-1} ជាតួចែករបស់

$$\left(\sum_{i=1}^{k} p^{nb_i}\right)-p^{n(k-1)}-p^{n(k-2)}-\ldots-p^n-1$$

ចូរបង្ហាញថា ស្វ៊ីត $(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ ជាចំលាស់នៃស្វ៊ីត $(0,1,\ldots,k-1)$។

596– ចូរកំនត់បណ្តាចំនួនបឋម p ដែល

$$f(p)=(2+3)-\left(2^2+3^2\right)+\left(2^3+3^3\right)-\ldots-\left(2^{p-1}+3^{p-1}\right)+\left(2^p+3^p\right)$$

ចែកដាច់នឹង 5។

597– គណនាចំនួន សនិទាន p,q,r ដែល

$$p\cos\frac{\pi}{7}+q\cos\frac{2\pi}{7}+r\cos\frac{3\pi}{7}=1$$

598– គេអោយចំនួនគត់ $n>0$ និង ចំនួនបឋម $p>n+1$ ចូរបង្ហាញថាពិតរឺមិនពិត ថា សមីការខាងក្រោមមានរឹសជាចំនួនគត់

$$1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{2n+1}+\ldots+\frac{x^p}{pn+1}=0$$

599– ចូរបង្ហាញថាមិនពិត ដែលថា ពហុធា $p(x)$ មួយមានដឺក្រេធំជាង១ ដែល បើ $p(x)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $p(x+1)$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$។

600– គេអោយចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស p និងចំនួនគត់ a,b,c,d,e ដែល $a+b+c+d+e$ និង $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ ចែកដាច់នឹង p ទាំង២។ ចូរបង្ហាញថា $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ ក៏ចែកដាច់នឹង p ដែរ។

601– ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់ k ដែល ស្វ៊ីតកំនត់ដោយ

$$a_1=1, a_{n+1}=5a_n+\sqrt{ka_n^2-8}, n=1,2,3,..$$

មានតួវាទាំងអស់សុទ្ធតែជាចំនួនគត់។

602– សន្មតថា a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $2a-1, 2b-1, a+b$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម។ ចូរបង្ហាញថា a^b+b^a និង a^a+b^b សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង $a+b$។

603– គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន n។ តាង w ជាផលបូកនៃ n ចំនួនគត់ដំបូង។ ចូរបង្ហាញថា សមីការ

$$x^3+y^3+z^3+t^3=2w^3-1$$

មានចំលើយជាចំនួនគត់ច្រើនរាប់មិនអស់។

604– គេអោយចំនួនបឋម $p>2$ ដែល $p-2$ ចែកដាច់នឹង៣។ ចូរបង្ហាញថា សំនុំនៃចំនួនគត់ ដែលកំនត់ដោយ y^2-x^3-1 ដែល x,y ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន តូចជាង p, មានយ៉ាងច្រើន $p-1$ ធាតុ ដែលចែកដាច់នឹង p។

605– គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន n, ចូរគណនា ចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលមិនលើសពី $n(n+1)(n+2)$ ដែល ចែកដាច់នឹង $n, n+1, n+2$

606– តាង p ជាចំនួនបឋម ធំជាង 3 ចូរបង្ហាញថា $\binom{2001p^2-1}{p-1}-1$ ចែកដាច់នឹង p^4។

607–តាង a និង b ជាចំនួន២ដែលបឋមនឹងគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា មាន ចំនួនគត់ធម្មជាតិចំនួន $\frac{1}{2}(ab-a-b+1)$ គត់ ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $ax+by$ បាន ដែល x,y ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

608– ចូរគណនាគ្រប់គូនៃចំនួនគត់ (m,n) ដែល

$$\frac{n}{m}=\frac{\left(m^2-n^2\right)^{n/m}-1}{\left(m^2-n^2\right)^{n/m}+1}$$

609– ចូរកំនត់គ្រប់គូចំនួនគត់(x,y) ដែល $x^2+xy+y^2+14x+14y+2018$ ចែកដាច់នឹង 101។

610– ស្វ៊ីត (a_n) កំនត់ដោយ $a_1=5, a_2=11$ និង $a_{n+1}=2a_n-3a_{n-1}, n=2,3,...$ ចូរបង្ហាញថា ស្វ៊ីតនេះ មានតួវិជ្ជមាននិងអវិជ្ជមានច្រើនរាប់មិនអស់។ ចូរបង្ហាញថា a_{2002} ចែកដាច់នឹង១១។

611– គណនាចំលើយជាចំនួនគត់នៃសមីការ

$$4(a-x)(x-b)+b-a=y^2$$

ដែល a,b ជាចំនួនគត់ដែលគេអោយ, $a>b$។

612– ចូរបង្ហាញថា បើ $2n$ ជាផលបូកនៃចំនួនការេ២ខុសគ្នា (ធំជាង១) នោះ n^2+2n ជាផលបូកនៃ៤ចំនួនការេ (ធំជាង១)។

613– គេអោយចំនួនគត់ធម្មជាតិ n និងចំនួនបឋម p ។ តើមានសំនុំនៃ p ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\left\{a_0,a_1,...,a_{p-1}\right\}$ ចំនួនប៉ុន្មាន ដែល

ក) $1\le a_i\le n$ ចំពោះគ្រប់ $i=0,1,...,p-1$

ខ) $PPCM\left(a_0,a_1,...,a_{p-1}\right)=p\min\left\{a_0,a_1,...,a_{p-1}\right\}$

614– ស្វ៊ីត២៖ (x_n) និង (y_n) កំនត់ដោយ

$$x_{n+1}=-2x_n^2-2x_ny_n+8y_n^2, x_1=-1$$

$$y_{n+1}=2x_n^2+3x_ny_n-2y_n^2, y_1=1$$

ចំពោះ $n=1,2,3,...$ ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនបឋម p ដែល x_p+y_p ចែកមិនដាច់នឹង p ។

615– ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់ (n,m) នៃសមីការ

$$(n+1)(2n+1)=10m^2$$

616– ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលពហុធាមាន $n+1$ តួ

$$p(x)=x^{4n}+x^{4(n-1)}+...+x^8+x^4+1$$

ចែកដាច់នឹង ពហុធាមាន $n+1$ តួ

$$q(x)=x^{2n}+x^{2(n-1)}+...+x^4+x^2+1$$

617– តាង p,q ជាចំនួនបឋម ដែល $p>q>2$ ។ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ k ដើម្បីអោយសមីការ $(px-qy)^2=kxyz$ មានចំលើយជាចំនួនគត់ (x,y,z) ដែល $xy\ne 0$ ។

618– ចូរគណនាសំនល់នៃវិធីចែក ចំនួន a^b+b^a នឹង៩ ដោយដឹងថា $a=22...22$ មានលេខ២ចំនួន២០០៤ខ្ទង់ និង $b=33..33$ មានលេខ៣ចំនួន២០០៥ខ្ទង់(សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល១០)។

619– ពិនិត្យសមីការ

$$x^2-2kxy^2+k\left(y^3-1\right)=0$$

ដែល k ជាចំនួនគត់។ ចូរបង្ហាញថា សមីការមានរឹសជាចំនួនគត់ (x,y) ដែល $x>0, y>0$ លុះត្រាតែ k ជាចំនួនការេ និងច្រាសមកវិញ។

620– ចូរបង្ហាញថា ពហុធា

$$p(x)=x^4-2003x^3+(2004+a)x^2-2005x+a$$

ដែល $a\in\mathbb{Z}$ មានយ៉ាងច្រើនរឹសជាចំនួនគត់មួយ។ ចូរបង្ហាញថា ពហុធានេះ គ្មានរឹសជាចំនួនគត់ពហុគុណទេ។

621– ចូរគណនាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស n តូចបំផុត ដែល n^2 ជាសរសេរជាផលបូកនៃ m ចំនួនការេបន្តបន្ទាប់គ្នា ដែល m ជាចំនួនសេស។

622– គេអោយ n ចំនួនវិជ្ជមានខុសគ្នា $n\geq 4$។ ចូរបង្ហាញថា គេអាចជ្រើសរើសបានយ៉ាងហោចណាស់២ចំនួន ដែលមានផលបូកនិងផលសង ខុសពី $n-2$ ចំនួនផ្សេងទៀត។

623– គេអោយពហុធា $Q(x)=(p-1)x^p-x-1$ ជាចំនួនបឋមសេស។ ចូរបង្ហាញថា គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $Q(a)$ ចែកដាច់នឹង p^p។

624– គណនាចំនួនគត់ x, y, z, t ដែល

$$x^y + y^z + z^t = x^{2005}$$

625– ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n > 2$ គេមាន n ចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា ដែល ផលបូកនៃចំនួនទាំងនេះ ស្មើនឹង ពហុគុណរួមតូចបំផុតរបស់ពួកវា និងស្មើនឹង $n!$។

626–ចូរកំនត់ចំនួនគត់ (x, y) ដែល

$$5x^2 + 4y^2 + 5 = \left(x^2 + y^2 + 1\right)^2$$

627– គណនាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x, y, z ដែល $x^3 + y^3 = 2z^3$ និង $x + y + z$ ជាចំនួនបឋម។

628– តាង p ជាចំនួនបឋមសេស ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} - \left(2^p + 1\right) \quad \text{ចែកដាច់នឹង } p^2$$

629– ចូរគណនាគ្រប់ x ដែលចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនគត់

$$\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 3}$$

630– ចូរគណនាចំលើយជាចំនួនគត់នៃប្រព័ន្ធសមីការ

$$4x^3 + y^2 = 16$$
$$z^2 + yz = 3$$

631– ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនដែលមានលេខ៤ខ្ទង់ $\overline{abcd}$ ដែល

$$\overline{abcd} = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 + 2006$$

632– ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន r តូចជាង៥៩ គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តែមួយគត់ ដែលតូចជាង៥៩ ដែល $2^n - r$ ចែកដាច់នឹង៥៩។

633– a ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ធំជាង១។ យើងពិនិត្យសំណុំ $A \subset \mathbb{N}$ មិនទទេមួយដែល បើ $k \in A$ នោះ $k + 2a \in A$ និង $\left[\dfrac{k}{a}\right] \in A$ ដែល $[x]$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ x។

ចូរបង្ហាញថា $A = N$ ។

634– គណនាចំនួនបឋម p ដែល $2005^{2005} - p^{2006}$ ចែកដាច់នឹង $2005 + p$ ។

635– សន្មតថា r, s ជាគូរឹសវិជ្ជមានតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$x^2 + xy + x = 1$$
$$y^2 + xy + x + y = 1$$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 8\cos^3 \frac{\pi}{7}$$

ឯកសារដើម

សៀវភៅនេះដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅខាងក្រោមនេះ

១) *ក្រសួងអប់រំជាតិ* - គណិតវិទ្យា ពីជគណិត ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិសោធ, ខេមរយានកម្ម ១៩៧៣

២) *ដាវីដ អ. សាន់តូស*- Number theory for mathematical contests, 2005

៣) *ពៀរ បោនស្ទិន, សាវៀរ ការុស្វ, ពៀរ នោលិន, មេហ្គី ទីប៊ូស៊ី*- Cours d'Arithmétique, 2004

៤) *ទីតុ អង់ទ្រឺស្គុ, ដូរិន អង់ទ្រឺកា, ស៊ុមីង ផេង*- Number Theory Problems,2007

៥) *ដ.អូ. ឆ្កាស្គី, ន.ន. ឆិនត្សូវ, អ៊ី.ម. យ៉ាគ្លោម*, The USSR Olympiad Problem Book.